LINEÆ
TERTII ORDINIS
NEUTONIANÆ,

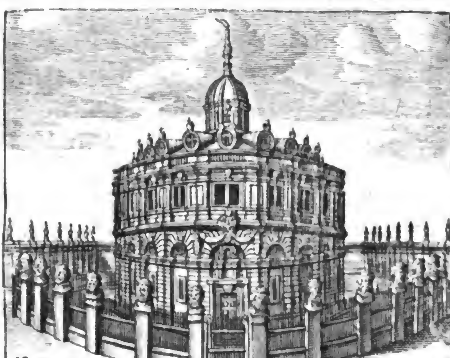
SIVE

Illuſtratio Tractatus D. *Neutoni* De Enumeratione *Linearum Tertii Ordinis*.

Cui Subjungitur,

Solutio Trium Problematum.

Authore JACOBO STIRLING, è Coll. Ball. *Oxon*.



OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, Impenſis *Edvardi Whiſtler* Bibliopolæ *Oxonienſis*, MDCCXVII.

Imprimatur,

JO. BARON,

Vice-Can. Oxon.

Apr. 11. 1717.

HONORATISSIMO D^no^.

D^{no}. *NICOLAO TRON*

E Q U I T I;

LEGATO Sereniſſimæ Reipublicæ *Venetorum* apud REGEM *Magnæ Britanniæ*.

NON eam præ me fero Inſolentiam, qui primam hanc ſtudiorum meorum ſobolem veſtrum (Vir Illuſtriſſime) patrocinium mereri exiſtimem. Cæterùm hæc mihi prima in manus tradita eſt occaſio agnoſcendi ea Beneficia, quibus immerentem Me accumulare es dignatus. Nihil fortaſsè gratius à Tenuitate noſtrâ Tibi rependi potuit; tum quoniam celeberrimi *Neutoni* Opera maximis Tu, ſi quis alius, in Deliciis ſemper habuiſti, tum quòd Veſtra Excellentia non minus amet,

quam foveat Philosophiam, quæ nisi *Mathematicis* Principiis suffulta, corruet. Hic sese mihi aperit Laudum Tuarum Campus, quas aggredi esset supervacaneum, siquidem dulcis Patriæ amor, & insignis Tua in rebus gerendis Peritia satis superque innotescunt ex sublimi Dignitatis gradu ad quem Serenissima Respublica Te promovit. *Cùm* igitur *tot & tanta negotia sustineas*, nihil addam ulteriùs, *ne longo sermone morer Tua tempora*, & nè contra ipsas *Matheseos* (quam colo) Regulas, brevitatis semper amantes, peccare videar.

Excellentiæ Vestræ

Omni cultu & obsequio

Devinctissimus

JA. STIRLING.

A
CATALOGUE
OF THE
Subſcribers Names
To this Work.

A.

DR. Arthburthnot for two.
Mr. Geo. Atwood Fellow of St. John's Coll. B. D.
Mr. Tho. Archer of Trin. Coll. Gent. Com.
Mr. Ant. Anderſon of Bal. Coll. Com.
Mr. Price Allergy.

B.

John Baron, D. D. Maſter of Bal. Coll. and Vice-Can. of Oxford for ſix.
R. Blechynden, LL. D. Provoſt of Worc. Coll.
Henry Brereton Fellow of St. John's Coll. LL. D.
Mr. William Burnet for four.
Mr. Tho. Brotherton of Bal. Coll. A. B.
Mr. Bich of Trin. Coll. LL. B.

Mr. John Ballyman of Bal. Coll. A. B.
Mr. Tho. Burrington of Bal. Coll. A. M.
Mr. John Bolton of Trin Coll.
Mr. Tho. Boycott of Bal. Col. Gent. Com.
Mr. John Blackmore of Bal. Coll. Gent. Com.
Mr. Ramond Blackmore.
Mr. Sam. Baldwin of Bal. Coll. Gent. Com.
Mr. John Bevis of Ch. Church, A. B.
Mr. Michael Biddulph of Magd. Coll. A. M.
Mr. William Bromley of Ch. Ch. Gent. Com.
Mr. Ja. Bradley of Bal. Coll. A. M.
Mr. Tho. Bury of Exeter Coll. Com.
Mr. Patrick Brifco of Barn Elms.
Mr. Rob. Booth of Ch. Church.
Mr. John Buckley of St. John's Coll. Com.
Mr. Rob. Brynker Fellow of Jefus Coll. A. M.
Mr. Ja. Brynker of Jefus Col. Schol.

C.

Dr. Cockburn.
Mrs. Cockburn.
Ja. Clarke, M. D.
Mr. R. Charnock Fellow of All Souls Coll. A B.
Mr. Nath. Crynes, A. M. Efq; Beadle.
Mr. John Clark of Worcefter Coll. Com.
Mr. George Coningsby of St. Mary Hall, A. M.
Mr. George Cox of Magd. Coll. A. B.
Mr. Tho. Cox Fellow of Merton Coll. A. M.
Mr. John Conybeer of Exeter Coll. A. M.
Mr. Walter Clerges of Ch. Church.
Mr. H. Clements Bookfeller in *London* for fix.

D.

D.

Dr. John Drummond, M. D.
Mr. George Davidſon, A. M.
Mr. J. Theop. Deſaguliers for two.
The Honble Wriotheſly Digby.
Mr. Robert Dyer of Bal. Coll. Com.
Mr. Robert Dobbens of Trin. Coll. Com.

E.

Sir Francis Edwards of Trin. Coll. Bart.
Mr. Edw. Emes of Magd. Coll. A. M.
Mr. James Eccles of Bal. Coll. Civil.
Mr. Thomas Elliot of Exeter Coll. Com.

F.

Dr. John Friend.
Dr. Rob. Friend.
Mr. Weſt Fenton of Queen's Coll. Com.
Mr. John Farnham of Wadh. Coll. Com.
Mr. Rob. Frampton of Jeſus Coll.

G.

Mr. Richard Gilman Fellow of St. John's Coll. A. M.
Mr. Tho. Girdler Fellow of Wadh. Coll. B. D.
Mr. John Gilman, A. M.
Mr. Nath. Gilbert of Wadh. Coll. Com.
Mr. Timothy Geers of Worceſter Coll.
Mr. Tho. Garbit of Bal. Coll. Com.
Mr. Edward Gayer of Bal. Coll. Gent. Com.

Mr. Henry Gregory of Ch. Church.
Mr. William Gregory of Bal. Coll. Gent. Com.

H.

Sir Henry Hoo Keate of Worcester Coll. Bart.
Tho. Haywood Fellow of St. John's Coll. D.D.
Mr. C. Holt Proctor, Fellow of Mag. Coll. A.M.
Mr. Jos. Hunt Fellow of Bal. Coll. A. M.
The Honble. Mr. Hugh Hare of Hart Hall, Gent. Com.
Mr. C. Herbert.
Mr. Henry Hastings of St. John's Coll. A. B.
Mr. Charles Harris of Bal. Coll. Gent. Com.
Mr. Edw. Harrington of Wadh. Coll. A. B.
Mr. William Hughes of Wadh. Coll.
Mr. Cha. Hughes of Bal. Coll. A. M.
Mr. Will. Huddesford of All-Souls Coll. A. B.
Mr. Thomas Hesketh of Brase-Nose Coll. Gent. Com.
Mr. William Hunt of Trin. Coll. Com.
Mr. Edw. Hulton of Brase-Nose Coll.

I.

Peter Jennings of St. John's Coll. LL. D.
John Johnston, M. D.
Mr. James Jenkinson of Magd. Coll. A. M.
Mr. Edmund Isham of Magd. Coll. A. M.
Mr. Charles Jennings of Bal. Coll. Gent. Com.
Mr. John Ingram of Bal. Coll. A. B.
Mr. Richard Jenkinson of Ch. Church. A. M.
Mr. William Jones Teacher of the Mathematicks for six.

Mr.

K.

Jo. Keill, M. D. for fix.
Ja. Keill, M. D. for two.
Mr. Will. Mytton of Wadh. Coll. A. B.
Mr. Roger Moftyn of Jefus Coll.
Mr. Charles Kimberley of Ch. Church. M. B.
Mr. Benj. Kennet Fellow of Bal. Coll. A. M.
Mr. Lawr. Kingsford of St. John's Coll. A. M.
Mr. Francis King of Bal. Coll. A. B.
Mr. John Kidby of Bal. Coll. A. B.

L.

Mr. Gil. Lake of Ch. Church, B. D.
Mr. John Leaves of Wadh. Coll. A. M. for two.
Mr. John Long Fellow of Corpus Chrifti Coll. B. D.
Mr. William Lux Fellow of Bal. Coll. A. B.
Mr. Rob. Layng of Ball. Coll. A. B.
Mr. Henry Lowndes of Ch. Church.
Mr. Tho. Loveday of Bal. Coll. Com.
Mr. Will. Livefay of Bal. Coll. Com.
Mr. Sam. Lee of Bal. Coll. Com.

M.

Richard Mede, M. D.
Mr. Richard Meredith Fellow of St. John's Coll. A. M.
Mr. John Machel Fellow of Magd. Coll. A. M.
Mr. William Metcalf of Trin. Coll. Gent. Com.
Mr. Peter Maurice Fellow of Jefus Coll. A. M.

Mr.

Mr. Tho. Morris of Wadh. Coll. Com.
Mr. Sam. Mertin of Wadh. Coll.
Magd. Hall Library.
Mr. Rob. Michel of Bal. Coll. Com. for two.
Mr. Mosely Fellow of Merton Coll. A. B.
Merton Coll. Library.
Mr. Tho. Merten of Linc. Coll.

N.

Sr. Isaac Newton for two.
Mr. John Newton of Bal. Coll. Gent. Com.
Mr. —— Needler.
Mr. John Niccol.
Mr. Francis Nichols of Exeter Coll. Com.

O.

Mr. Samuel Ongley of St. John's Gent. Com.

P.

Mr. T. Parrot Fellow of St. John's Coll. LL.B.
Henry Parrot of North-Leigh, Esq;
Mr. Tho. Packington of Bal. Coll. Gent. Com.
Mr. Tho. Pearcy of St. John's Col. A. M.
Mr. Joshua Penn Fellow of Worcest. Coll. A. M.
Mr. John Peters of Hart Hall, A. M.
Mr. James Pound, M. B. for two.
Mr. John Portrey of Jesus Coll.
Mr. Tho. Price of Jesus Coll.
Mr. J. Preston Fellow of St. John's Coll. A. M.
Mr. Rob. Pye of Wadh. Coll. Gent. Com.

Q.

Q.

His Grace the Duke of Queensbury for four.

R.

Tho. Rawlinson, Esq;
Mr. Richard Rawlinson of St. John's Col, A.M.
Mr. Barth. Richards Fellow of Bal. Coll. A. M.
Tho. Rowney Jun. Esq;
Mr. James Rowe of Bal. Coll. A. B.
Mr. Joseph Richardson of Bal. Coll. Com.

S.

The Right Honble. Earl of Strathmore for two.
Mr. Joseph Sandford Fellow of Bal. Coll. A.M.
Mr. Tho. Smith of St. John's Coll.
William Shepherd of Rowlright, Esq;
Mr. William Shaw of Trin. Coll. Gent. Com.
Mr. John Saxon of Bal. Coll. A. B.
Mr. T. Sheffington of Oriel Coll. Gent. Com.
Mr. Edw. Strong Fellow of Bal. Coll. A. M.
Mr. Charles Scot of Fellow of New Coll. A. M.
Mr. William Symes Bal. Coll. A. M.
Mr. Edward Seabright of Bal. Coll. Gent. Com. for four.
Mr. Robert Savery of Bal. Coll. A. B.
Mr. John Spurway of Bal. Coll. Schol.
Mr. John Sadler of Wadh. Coll. A. B.
Mr. Joseph Stockwell Fellow of Trin. Coll. B.D.
Mr. Alexander Sutherland, Sen.
Mr. Tho. Smalman of Bal. Coll. Com.

Mr.

T.

Mr. J. Terret Fellow of St. John's Coll. A.M.
Mr. Tho. Tillefly Fellow of St. John's Coll.
Mr. John Tottenham Fellow of Linc.Coll.A.B.
Mr. T. Tooly Fellow of St. John's Coll. A.M.
Mr. John Travel of Exeter Coll.
Mr. John Tounfhend of Bal. Coll. A. B.
Mr. Henry Thomas Fellow of New. Coll. A.M.
Mr. Rice Thomas of Jefus Coll.
Mr. James Tate, A. M.

V.

Mr. John Vivers of Trinity Col. Com.

W.

Mofes Wiles Fellow of St. John's Coll. D. D.
Mr. John Whitefide A.M. and Keeper of the *Mufæum*, for fix.
Mr. H. Whiftler Fellow of Magd. Coll. A. M.
Mr. John Whitmore of Bal. Coll. Com.
Mr. Alex. Walker of Trin. Col. Gent. Com.
Mr. Ralph Webb Fellow of Magd. Coll. A. M.
Worcefter Coll. Library.
Mr. William Walker of Trin. Coll. Gent. Com.
Mr. Edw. Wilfon of Bal. Coll. A. B.
Mr. Edmund Walrond of Bal. Coll. A. B.
Mr. Chriftoph. Willoughby of Magd.Coll. A.B.
Mr. Tho. War of Trin. Coll. Gent. Com.
Mr. Cuth. Wade of Brafe-Nofe Coll. for two.

LINEÆ TERTII ORDINIS NEUTONIANÆ, &c.

DEFINITIONES.

1. LINEA *Geometrica* est cujus Abſciſſæ & Ordinatæ correſpondentes eandem inter ſe ubique obtinent relationem.
2. *Linea Rationalis* est cujus Abſciſſæ & Ordinatæ relationem obtinent æquatione vulgari Algebraicâ deſignabilem.
3. *Linea Irrationalis* eſt quando relatio illa æquatione iſtiuſmodi exprimi nequit.
4. *Aſymptotos* curvæ eſt Linea ſimpliciſſima, ſive curva ſive recta ſit, quæ ad curvæ crus tanto magis continue accedit quanto magis producitur, tandem cum eo coincidens.
5. *Crura ejuſdem generis* ſunt quæ pro Aſymptotis ſuis ſortiuntur Lineas ejuſdem ſpeciei.
6. *Hyperbola Inſcripta* eſt quæ tota jacet in Aſymptoton angulo adinſtar Hyperbolæ Conicæ.
7 *Circumſcripta* eſt quæ Aſymptotos ſecat & partes abſciſſas in ſinu ſuo complectitur.

8. *Ambigena* eſt quæ uno crure *Inſcribitur* & altero *Circumſcribitur*.

9. *Conchois* eſt figura habens duo crura ad eaſdem ejuſdem Aſymptoti partes jacentia, & in plagas oppoſitas protenſa, cum vertice verſus Aſymptoton concavo.

10 *Anguinea* vero eſt figura, quando crura jacent ad diverſas Aſymptoti partes.

11. Figura *Cruciformis* eſt, quando quatuor ejus crura in uno puncto conveniunt.

12 *Nodata* eſt, quando duo crura ſe invicem decuſſant: *Nodum* quaſi efficientia.

13. *Cuſpidata* eſt, quando crura in eorum conjunctione *Cuſpidem* efficiunt.

14. *Punctata* eſt quæ *Ovalem* habet conjugatam infinite parvam, id eſt, punctum.

15. *Pura* eſt quæ *Ovali*, *Nodo*, *Cuſpide* & *Puncto conjugato* privatur.

Linearum Rationalium Ordines.

LInearum Rationalium obvia eſt diviſio, ab ipſarum naturis deſumpta, in ſimpliciores ſcilicet & magis compoſitas pro ratione dimenſionum æquationis, quâ relatio inter Abſciſſas & Ordinatas definitur; quando quidem æquatio illa ſimpliciſſima eſt in qua quantitates indeterminatæ ſunt pauciorum dimenſionum. Qua ratione generaliſſima æquatio alicujus ordinis comprehendit omnes lineas ejuſdem. Ergo Linea primi ordinis erit recta ſola æquatione

$y+ax+b=0$ deſignata, Eas ſecundi ordinis deſignat $y^2+\overline{ax+b}\times y+cx^2+dx+e=0$, Eas tertii $y^3+\overline{ax+b}\times y^2+\overline{cx^2+dx+e}\times y+fx^3+gx^2hx+k=0$, Eas quarti $y^4+\overline{ax+b}\times y^3+\overline{cx^2+dx+e}\times y^2+\overline{fx^3+gx^2+hx+k}\times y+lx^4+mx^3+nx^2+px+q=0$, Eas quinti $y^5+\overline{ax+b}\times y^4+\overline{cx^2+dx+e}\times y^3+\overline{fx^3+gx^2+hx+k}\times y^2+\overline{lx^4+mx^3+nx^2+px+q}\times y+rx^5+sx^4+tx^3+ux^2+vx+w=0$, Et ſic proceditur in infinitum.

In hiſce æquationibus x eſt Abſciſſa, y Ordinata in quovis angulo ad ſe invicem inclinatæ; $a, b, c, d,$ &c. quantitates datæ ſignis ſuis $+$ & $-$ affectæ, quarum una vel plures deeſſe poteſt, modo ex tali defectu, Linea non migret in aliam ordinis inferioris.

Hæ æquationes ſunt ſui ordinis generaliſſimæ; continent quippe omnes Abſciſſæ & Ordinatæ combinationes, ubi earum dimenſiones in uno æquationis termino ſimul ſumptæ non ſuperant dimenſionem maximam ordinatæ. Etenim dimenſio Curvæ pendet ex maxima dimenſione Abſciſſæ & Ordinatæ in eodem æquationis termino.

Numerus Coefficientium in illis æquationibus.

Per Coefficientes hic intellige quantitates datas $a, b, c, d,$ &c. Harum numerus in prima æquatione eſt 2, in ſecunda 5, in tertia 9, in quarta 14, in quinta 20, & ſic porro. Atq

hi numeri ſic generantur, eſt $5 = 2 + 3$, $9 = 2 + 3 + 4$, $14 = 2 + 3 + 4 + 5$, $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, &c. Adeoque ex Arithmetica ſummatoria univerſaliter facile colligitur, quod ſi ſit n numerus dimenſionum curvæ, erit $\frac{n^2 + 3n}{2}$ numerus Coefficientium in æquatione generaliſſima Lineas omnes illius ordinis definiente. Hujus uſus in ſequentibus patebit.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Omnis Linea Geometrica curvaturâ continuâ vel in ſe redit, vel pergit in infinitum.

LIneam Geometricam motu puncti continuo deſcriptam hic conſidero; omnis enim Linea Geometrica motu puncti certâ quadam conditione conſtanti moventis deſcribi poteſt: quum igitur motus puncti lege immutabili attemperatur, neceſſario durabit ejus motus in infinitum. Unde via percurſa, id eſt, Linea Geometrica, vel in ſe redit, vel pergit in infinitum, idque curvaturâ continuâ ob regularem puncti motum. Q. E. D.

Coroll. 1. Superficies ſolidorum omnium Geometricorum, curvaturâ continuâ, vel in ſe redeunt, vel pergunt in infinitum. Nam ſuperficies Geometricæ, eodem plane modo Linearum motu genitæ concipiendæ ſunt, quo Lineæ punctorum motu: adeoque hoc Corollarium & hæc Propoſitio ſimili prorſus argumentandi genere demonſtrantur.

Coroll.

Coroll. 2. Crura infinita alicujus Lineæ ductu continuo ſemper conjunguntur. Nam punctum deſcribens neceſſario tranſit ab uno crure ad aliud.

Coroll. 3. Et inde neceſſario ſequitur, quod crurum infinitorum numerus ſemper eſt par: alias enim ſervari nequit motus puncti continuus in infinitum.

Coroll. 4. Omnes rectæ parallelæ ſecant curvam aliquam in iiſdem numero punctis realibus & imaginariis. Hoc Corollarium facillime patet ex Propoſitione & Corollariis ejus ſecundo & tertio.

Coroll. 5. Unde ſi æquatio quælibet involvat duas indeterminatas, Abſciſſam x & Ordinatam y; numerus valorum poſſibilium & impoſſibilium Ordinatæ y, in omni Abſciſſæ x magnitudine idem ſemper eſt. Hujus Corollarii beneficio invenire licet numerum radicum æquationis Fluxiones involventis, ut & æquationis in quâ quantitates indeterminatæ indeterminatas habent etiam Exponentes; ut poſtea patebit.

Coroll. 6. Ex Lineæ Geometricæ curvaturâ continuâ, ſequitur nota illa æquationum proprietas; ſcilicet quod radicum impoſſibilium numerus ſemper eſt par.

Serierum infinitarum frequens in ſequentibus erit uſus: viſum eſt igitur aliquid de iiſdem præfari, quum nec earum natura, nec methodus eas inveſtigandi ab aliquo, quod ſciam, huc uſque ſatis explicata fuerit.

De Serierum infinitarum Ortu.

D. *Wallisius*, in *Arithmetica Infinitorum* Anno 1655. publicatâ, multis exemplis particularibus generaliter tandem invenit, quod si Ordinata curvæ sit $x^{\frac{m}{n}}$ erit ejus area $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ Ope hujus regulæ quadravit omnes curvas quarum Ordinatas habere potuit in terminis rationalibus expressas. D. *Neutonus* per Interpolationem arearum ab Ordinatis (per *Wallisii* regulam) deductarum quadravit Circulum. Et ex datâ ejus areâ in serie infinitâ, per reversum regulæ *Wallisii* invenit ejus ordinatam in serie etiam infinita expressam. Et methodum Interpolandi prosecutus, Theorema suum invenit pro elevando Binomio ad dignitatem quamvis indeterminatam: ut constat ex Epistolâ ejus ad D. *Oldenburgium* 13 Junii Anno 1676. missa. Sed Interpolationum methodum missam tandem faciens, operationes speciosas perinde ut Arithmeticas instituere cœpit, atque docuit reducere radices æquationum omnium, primo simplicium deinde affectarum, in series convergentes. Hoc patet ex ejus *Analysi* à *Barrovio* ad *Collinium* mense Julio, Anno 1669. missa. In eâdem *Analysi*, Serierum ope, quadravit curvas tum *Geometricas* tum *Mechanicas* ut appellari solent. Et docuit quâ ratione, ex datâ areâ vel longitudine curvæ inveniri possit

Ba-

Basis vel Ordinata. Sub finem ejusdem *Analyseos*, ope serierum universaliter demonstravit regulam *Wallisii*, methodo nova quæ alia non erat, quam *Fluxionum* methodus.

Cartesius, *Barrovius*, aliique in *Tangentium* methodis, docuerunt invenire rationes primas & ultimas quantitatum *Nascentium* & *Evanescentium*, at non generaliter; Et *Wallisius*, uti mox dictum est, ostendit quomodo inveniri possit area ex data Ordinata terminis rationalibus expressa: Hæc erant dubia & obscura vestigia *Fluxionum* methodi directæ & inversæ. Et impossibile fere erat, absque serierum doctrina, hanc methodum ulterius promovere; quam promoverunt præfati docti Viri. Unde sane non video quâ ratione quis possit *Fluxionum* methodi inventionem sibi arrogare, & non etiam serierum inventionem.

De Natura Serierum.

SErierum methodus in eo fundatur, ut primo assumatur quantitas radici quæsitæ æqualis quam proxime, & corrigatur valor assumptus continue: quo pacto habebitur tandem quantitas, quæ à radicis vero valore minus distabit quavis quantitate data. Hoc vero multifariam præstari potest.

Sit Series eo citius convergens quo minor est x, scilicet $y = Ax^{n} + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$ &c. Ponamus esse x admodum parvam, & terminus quilibet posterior erit priore multo minor, at-

que

que termini pauci initiales ad verum ipsius y valorem quam proxime accedent. Quod si sit x infinite parva, erit accurate $y = Ax^n$, terminis reliquis hujus termini respectu evanescentibus. In æquatione relationem inter x & y definiente, suppone x etiam infinite parvam, & termini quidam æquationis evadent reliquis infinite minores, qui proinde reliquorum maximorum respectu evanescent; è terminis igitur maximis ejusdem ordinis tanquam nihilo æqualibus (eodem plane modo quo ex æquatione numerali) extrahe radicem, nam erit illa Ax^n: qui terminus primus propterea dabitur. Per terminos maximos *ejusdem ordinis* intellige eos qui ad se invicem datam habent rationem, & sunt reliquis omnibus infinite majores. Pone $p = Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r}$ + &c. terminis nondum inventis, & erit $y = p + Ax^n$, quem ipsius y valorem in æquatione substituendo, obtinebis æquationem novam indeterminatas duas x, p involventem. In illa æquatione nova suppone etiam x infinite parvam, ut sit $p = Bx^{n+r}$ accurate, atque ex terminis maximis ejusdem ordinis tanquam nihilo æqualibus radix extracta erit Bx^{n+r}, qui terminus secundus proinde datur. Sit $q = Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$, &c. Unde erit $p = Bx^{n+r} + q$: hunc valorem ipsius p substitute in æquatione relationem inter x, p exprimente; & habebis æquationem tertiam quæ ostendit quam inter se x, q obtinent relationem. Ex hac æquatione invenies tertium terminum Cx^{n+2r} eodem plane modo quo terminos duos primos ex æquationibus

duabus prioribus obtinuisti. Et opus continuando invenire licet terminos seriei sequentes tot quot volueris.

Et si esset series hujusmodi $y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r} +$ &c. eo citius convergens quo major est x; inter operandum supponenda est x infinite magna: atque terminis ordinum inferiorum rejectis è maximis ejusdem ordinis educenda est radix; nam illa est Ax^n. Ponendo $p = Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r} +$ &c. adeoque $y = p + Ax^n$, habebitur æquatio nova, ex qua invenire licet terminum seriei secundum, & opus continuando reliquos tot quot est animus.

Et eadem ratione qua inveniuntur series eo citius convergentes quo major, vel quo minor est x, invenire licet series eo citius convergentes quo propius accedit x ad datam quamvis quantitatem. v. g. Si quæratur series eo citius convergens quo propius accedit x ad quantitatem a; nec suppono x infinite magnam nec infinite parvam, sed æqualem ipsi a, & tum quæro valorem ipsius y, nam ille valor est primus terminus seriei. Et quomodo ad libitum procedendum est, ex hactenus traditis satis patet.

Hæc de natura serierum & fundamento methodi ad eas perveniendi dicta sufficiant. Processus certe legitimus cuivis in diversis infinitorum ordinibus quam minime etiam versato necessario patet. Ex ipsa operatione facile videre est, has series non dare radices æquationum quæsitas, ni sat celeriter convergant; etenim

nim totus operandi processus in eo fundatur, ut sit x satis parva vel satis magna, hoc est, ut termini seriei subsequentes sint antecedentibus perpetuo minores. Hinc hallucinantur ii qui se aliquid Geometrice etiam accuratum ex seriebus parum convergentibus vel aliquando quidem divergentibus collegisse somniant. Eodemque modo demonstratur Divisio & Radicum Extractio Arithmetica. Omnes enim hujusmodi operationes tam Arithmeticæ quam Speciosæ eodem innituntur fundamento; scilicet ut seriei termini initiales ad quæsitum quam proxime accedant, reliqui vero ut eo magis continue sint minores quo magis à primo distant. Qui series divergentes adhibent in Problematum solutione; idem faciunt, ac si Divisionem Arithmeticam versus dextram, non versus sinistram inchoarent. Istiusmodi enim series quæsitum nunquam dant, sed mere sunt imaginariæ.

Hisce jam expositis, serierum inventio eousque reducitur, ut inveniantur termini maximi alicujus æquationis ejusdem ordinis; posito quod una indeterminatarum quas involvit æquatio, evadit infinite magna vel infinite parva. Quod tamen perficere nemo unquam valuit præter D. *Neutonum* serierum Inventorem. Duplici utitur ille methodo, una, Parallelogrammi scilicet, quam descripsit in Epistola ad D. *Oldenburgium* .24 Octob. Anno 1676. missa; quæ, quamvis à plurimis qui eam haud intellexerunt, ut methodus Mechanica diu neglecta jacuit, est

om-

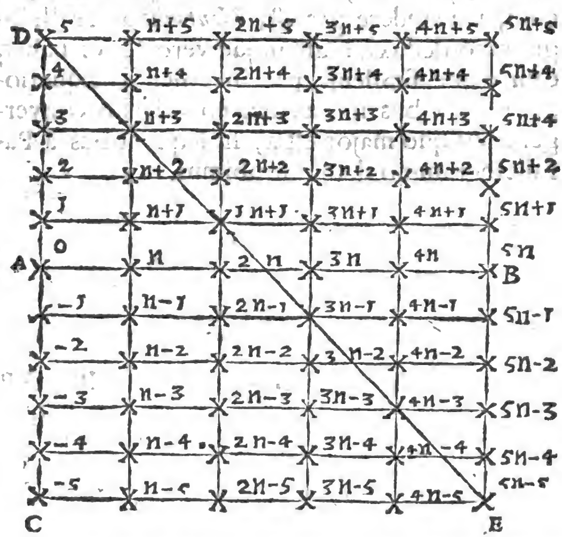
omnium quam quis excogitare potest generalissima & elegantissima. Alteram methodum descripsit D. *Neutonus* in Epistola ad D. *Wallisium* Anno 1692 missa: quæ, quamvis Geometræ præ priore hucusque amplexi sunt, est particularis solummodo; utpote cujus ope tantum invenire licet series eo citius convergentes quo minor est x; & hoc non adeo generaliter. Hæc methodus ait *Neutonus*, *ejusdem est generis cum eâ pro extrahendo radices ex æquationibus affectis superius descriptâ.* Hanc igitur methodum, uti credere par est, *Neutonus* à Parallelogrammo deduxit: utcunque vero se res habet, eam eique similem, pro inveniendis æquationum radicibus in seriebus eo celerius convergentibus quo major est x, in sequentibus à Parallelogrammo demonstrabimus.

 PROP.

PROP. II. PROBL.

Si una variabilium quas involvit æquatio evadat infinite magna vel parva, opporteat invenire terminos illius æquationis maximos ejusdem Ordinis.

DUC rectam DAC eique ad rectos angulos AB: hasce rectas divide in lineolas innumeras æquales, à quarum rectularum extremitatibus erige normales distribuentes spatia angularia DAB, CAB in rectangula innumera æqualia.



Sit x indeterminata ex cujus potestatibus conficienda est series, n index ipsius x in primo termino seriei, adeo ut sit radix quæsita y æqualis

lis Ax^n accurate, cum x eſt infinite magna vel infinite parva, prout ſeriei quæſitæ natura requirit.

Concipe rectæ CD partes ſingulas datas eſſe & unitati æquales; rectæ vero AB partes ſingulas variabiles & quantitati n ſemper æquales. In punctis angularibus æqualium rectangulorum ſubſtitue dignitates quantitatum x, x^n regulariter aſcendentium & deſcendentium à puncto A, uti in Schemate videre eſt.

Index cujuſvis poteſtatis ipſius x in recta CD poſitæ æqualis eſt ejus diſtantiæ à puncto A; affirmativi ſunt indices ſupra punctum A, negativi vero qui infra locantur. Eodemque modo, quum pars quælibet rectæ AB æqualis ſit n, index dignitatis cujuſvis ipſius x in recta AB poſitæ dat ejus diſtantiam à puncto A. Adeoque in punctis angularibus extra rectas AB & CD poſitis, una pars indicis dat diſtantiam à recta AB, altera pars diſtantiam à recta CD. Et inde index totus ſimul ſumptus æqualis eſt ſummæ aut differentiæ talium diſtatiarum, prout jacet ſupra vel infra rectam AB.

Duc jam rectam quamvis DE tranſeuntem per puncta duo quævis angularia x^r, x^{s+n-3}. Et indices terminorum omnium quos attingit recta illa DE erunt æquidiſtantes in progreſſione Arithmetica: Supponamus hoſce indices ſibi invicem æquari, hoc eſt, eorum differentiam eſſe nihil, & indices omnes alii majores, minores vel æquales erunt horum indicum alterutri, prout jacent ſupra, infra vel in ipſa recta DE.

DE. Hæc patent ex summis vel differentiis rectarum quibus diximus omnes indices æquari respective. Igitur si x sit quantitas infinite magna, termini quos attingit recta DE, erunt ejusdem ordinis, reliqui vero infinite majores vel minores terminis attactis prout jacent supra vel infra rectam DE. Et si x sit quantitas infinite parva, termini quos attingit DE erunt ejusdem ordinis, reliqui vero erunt terminis attactis infinite majores vel minores prout jacent infra vel supra rectam DE. Atque hinc tandem oritur solutio Problematis: scilicet quum æquatio aliqua proponitur, pone $y=x^n$, $y=x^{n-1}$, $y=x^{n-2}$, $y=x^{n-3}$, &c. neglectis coefficientibus. Terminos æquationis resultantes eodem modo dispone, quo in Schemate, cuique locum proprium adscribendo pro ratione indicis: ad horum terminorum sic dispositorum duos vel plures applicetur regula, ita ut omnes reliqui cadant supra vel infra regulam, prout quæris seriem ex ascendentibus vel descendentibus ipsius x dignitatibus confectam. Et termini quos attingit regula erunt maximi ejusdem ordinis. Q. E. I.

Si quando forte accidit, quod indices ipsius x sint fracti, vel etiam si vis surdi, & nimis operosum foret eos tollere; subdividendæ sunt partes lineæ CD: & inde erigendo normales, in earum cum reliquis concursu disponendæ sunt potestates quarum indices fracti sunt vel surdi. Hujus eadem ac Propositionis est demonstratio.

Coroll.

Coroll. 1. Supponamus terminos omnes infra rectam DE abesse. Et (per hanc Propositionem) termini x^5, x^{n+3}, x^{2n+1}, x^{3n-1}, x^{4n-3} & x^{5n-5} quos attingit Regula, erunt maximi ejusdem ordinis modo supponatur x infinite parva; & inde eorum indices necessario æquantur; hoc est, $n+3=5$, $2n+1=5$, $3n-1=5$, $4n-3=5$, & $5n-5=5$: harum quinque æquationum quælibet dabit $n=2$. Æquetur jam numerus 5 indici termini cujusvis alius supra rectam DE positi; sit exempli gratiâ $2n+3=5$, erit $n=1$; sit $4n=5$, erit $n=\frac{5}{4}$; sit $5n+5=5$, erit $n=0$; sit $3n+4=5$, erit $n=\frac{1}{3}$. Vides igitur quod æquando omnes indices numero 5 (qui hic ponitur index infimæ dignitatis ipsius x) valor ipsius n verus, est omnium valorum sic prodeuntium maximus, reliqui tamen vero valore semper prodeunt minores.

Coroll. 2. Cum itaque æquatio aliqua proponitur, & quæritur ejus radix in serie eo citius convergente quo minor est x, sit λ index infimæ potestatis ipsius x quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur; hoc est, sit λ index infimæ dignitatis ipsius x in rectâ CD positæ; pone $y=x^n$, $\dot{y}=x^{n-1}$, $\ddot{y}=x^{n-2}$, &c. Et, hisce valoribus in æquatione substitutis, æquentur omnes indices terminorum sic resultantium indici λ, & valor ipsius n omnium maximus inde proveniens, erit index ipsius x in primo termino seriei quæsitæ.

Est-

Estque hæc altera D. *Neutoni* methodus pro inveniendo indice termini primi.

Coroll. 3. Supponamus jam terminos omnes infra rectam DE jacere, & reliquos abesse, s qui nunc est index altissimæ dignitatis earum quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum potestates aliquas multiplicantur, æquatus indici cujusvis termini in rectâ DE positi semper dabit $n = 2$, ut antea in *Corollario* primo. Æquetur autem s indici dignitatis alicujus ipsius x infra rectam DE jacentis; sit verbi gratia, $n + 1 = s$, erit $n = 4$; Sit $2n - 3 = s$, erit $n = 4$; sit $n - 3 = s$ & erit $n = 8$. Constat ergo quod 2 verus ipsius n valor, est omnium sic provenientium semper minimus. Unde duco regulam sequentem.

Coroll. 4. Si quæritur series eo citius convergens quo major est x, sit $y = x^n$, $\dot{y} = x^{n-1}$, $\ddot{y} = x^{n-2}$, &c. hosce valores in æquatione substitue, & terminorum omnium resultantium indices æquentur ipsi λ (indici altissimæ dignitatis ipsius x, quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur) atque valor ipsius n omnium minimus hoc modo inventus, est index ipsius x in primo seriei termino.

Methodus hæc pro inveniendo indice primi termini seriei ex descendentibus ipsius x dignitatibus confectæ, similis est methodo D. *Neutoni* in Corollario secundo expositæ, pro inveniendo

endo indice termini primi in ſerie ubi poteſtates ipſius x perpetuo ſunt aſcendentes; earum vero neutra haud adeo generalis eſt, uti ex Parallelogrammo facile cuivis videre eſt.

Coroll. 5. Terminos quos attingit recta DE appello *primi ordinis terminos*. Moveatur recta illa DE motu parallelo, & ſimul tanget terminos x^4, x^{n+2}, x^{2n}, x^{3n-2}, x^{4n-4}: hi ſunt *termini ſecundi ordinis*; x^3, x^{n+1}, x^{2n-1}, x^{3n-3} x^{4n-5} ſunt *tertii ordinis termini*; x^2, x^n, x^{2n-2}, x^{3n-4} ſunt *quarti ordinis*: & ſic in infinitum. Terminos enim *ejuſdem ordinis* recta DE motu parallelo lata ſimul tanget. Et ſicut radix extracta ex terminis primi ordinis, dat terminum ſeriei primum; ſic radix extracta ex terminis primi & ſecundi ordinis, dat terminos duos primos, radix extracta ex terminis primi, ſecundi & tertii ordinis dat terminos tres primos; & ſic in infinitum. Unde ſi in æquatione deſint termini ordinum aliquorum intermediorum, termini ſeriei reſpectivi habebuntur extrahendo radicem ex terminis æquationis ordinum ſuperiorum. Deſint, verbi gratiâ, termini tertii, quarti, quinti & ſexti ordinis, & radix extracta ex terminis primi & ſecundi ordinis dabit primos ſex ſeriei terminos. Hæc obſervatio operationi aliquando compendium ſubminiſtret: exemplis vero in ſequentibus illuſtrabitur.

Coroll. 6. Ex hâc Propoſitione invenire licet numerum radicum, quas æquatio Fluxiones involvens habere poteſt, & quibus plures habere

nequit. Nam termini maximi ejusdem ordinis dant valorem ipsius y cum x est infinite magna vel infinite parva. Et (per Coroll. 5. Prop. 1.) numerus valorum ipsius y in omni Abscissæ x magnitudine idem semper est. Ergo æquationis, quæ dat y, cum x est infinite parva vel infinite magna, numerus radicum, æqualis est numero radicum quas æquatio proposita habere potest, & quibus plures habere nequit.

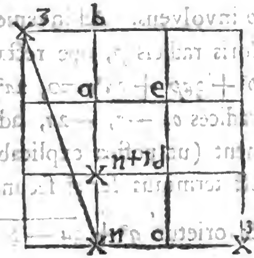
Adeoque etiam innotescit numerus radicum æquationis hujusmodi $y^x + ax^y = a$, ubi indeterminatarum indeterminatæ sunt coefficientes; nam ejusmodi æquatio transmutari potest in Fluxionalem.

Aliquando accidit, quod ad inveniendum primum terminum seriei, prodeunt duæ æquationes diversarum dimensionum: in illis casibus dimensio maxima semper dat numerum radicum æquationis propositæ.

Exemplum Primum.

ÆQuationis $y^3 - a^2y + axy - x^3 = o$ extrahendæ sint radices. Ut inveniatur index termini primi seriei quæsitæ, pone $y = x^n$, eritque $y^3 = x^{3n}$, $xy = x^{n+1}$. Terminis hisce dicto modo dispositis in punctis angularibus Parallelogrammi, video exteriorum tres casus accidere: scilicet, sunt x^3, x^n; x^n, x^{3n}, vel x^3, x^{3n} termini reliquis exteriores. Æquentur indices, & erit 1mo. $n = 3$, 2do. $n = o$, & 3tio. $n = 1$; igitur

tur si quæritur series ex dignitatibus ascendentibus confecta, potest esse 3 vel o index ipsius x in primo termino seriei. Moveatur recta $x^n x^3$ motu parallelo, & ea primo perveniet ad x^{n+1} terminum unicum secundi ordinis, secundo perveniet ad angulum *a*, tertio ad *b*, *c* simul, quarto ad *d*, quinto ad *e* & ultimo ad x^{3n} terminum ordinis infimi. Cum igitur desint termini ordinis tertii, quarti, quinti & sexti: invenientur primi sex seriei termini (per *Coroll.* 5. Prop. 2.) extrahendo radicem ex terminis $-a^2y+axy-x^3$ primi & secundi ordinis positis nihilo æqualibus. Hoc vero per Divisionem fit, nam si sit æquatio $-a^2y+axy-x^3=0$, erit $y=\frac{x^3}{-a^2+ax}$ adeoque dividendo est



$$y=\frac{-x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3}-\frac{x^5}{a^4}-\frac{x^6}{a^5}-\frac{x^7}{a^6}-\frac{x^8}{a^7}-\text{ \&c.}$$ hi sunt primi sex termini per divisionem inventi: terminus septimus invenietur esse $\frac{-2x^9}{a^8}$. Hic divisionem inchoavi à termino a^2 quoniam ponitur x admodum parva.

In casu secundo erat $n=0$, pro y itaque in æquatione substitue Ax^0, vel quod idem est A, ubi A est quantitas determinanda statim invenienda. Et orietur $A^3 - a^2A + axA - x^3 = 0$ evanescat jam x & erit $A - a^2A = 0$, unde est $A=0$, vel $A=\pm a$: igitur ter-

minus primus potest esse $+a$ vel $-a$: valor o spectat ad radicem jam inventam. Pone p æqualem terminis nondum inventis & erit $y = a + p$ quem ipsius y valorem in æquatione substituendo orietur æquatio $p^3 + 3ap^2 + \overline{2a^2 + ax} \times p + a^2x - x^3 = 0$ indeterminatas x, p involvens. Ad inveniendum terminum primum valoris radicis p, ope rectanguli habebimus æquationes $p^3 + 3ap^2 + 2a^2p = 0$, $2a^2p + a^2x = 0$, æquationis illius radices o, $-a$, $-2a$, ad seriem quæsitam non pertinent (ut postea explicabitur) hujus vero radix $-\frac{1}{2}x$ est terminus seriei secundus. Pone igitur $p = q - \frac{1}{2}x$, & orietur $q^3 + \overline{3a - \frac{3}{2}x} \times q^2 + \overline{2a^2 - 2ax + \frac{3}{4}x^2} \times q + \frac{1}{4}ax^2 - \frac{9}{8}x^3 = 0$, ubi æquatio $2a^2q - \frac{1}{4}ax^2 = 0$ dat $q = -\frac{x^2}{8a}$ proxime, vel $q = r - \frac{x^2}{8a}$. Hunc valorem pro q substituo, neglectis terminis q^3, $-\frac{3}{2}xq^2$, ut & iis in quibus r erit plusquam unius dimensionis, quos nulli usui futuros satis indicabit ipsa operatio, modo unum vel duos forte seriei terminos plures quærere tantum est animus; & exurget $2a^2r - 2axr = \frac{7}{8}x^3 - \frac{3x^4}{64a}$ proxime, atque dividendo, erit $r = \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3}$ &c. Ergo $y = a + p = a - \frac{1}{2}x + q = a - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8a} + r$ $= a - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8a} + \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3}$ &c. Et si pro primo ter-

termino usurpassem $-a$, prodiisset $y = -a + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8a} + \frac{9x^3}{16a^2} + \frac{69x^4}{128a^3}$ &c.

Hic notandum est quod primi tres termini prodeunt rejiciendo x^3, & ex terminis reliquis $y^3 - a^2y + axy = 0$, id est, ex $y^2 - a^2 + ax = 0$ extrahendo radicem.

***Radix unica in serie eo citius convergente quo major est* x.**

In tertio casu erat n unitas; pone ergo $y = Ax$, & orietur $A^3x^3 - a^2Ax + aAx^2 - x^3 = 0$, termini maximi $A^3x^3 - x^3$ ejusdem ordinis positi æquales nihilo dant $A = 1$; ergo est x primus terminus seriei. Pone $y = x + p$, & resultabit $p^3 + 3xp^2 + \overline{3x^2 + ax - a^2} \times p + ax^2 - a^2x = 0$, ubi termini $3x^2p$, ax^2 positi æquales nihilo dant $p = -\frac{1}{3}a$ fere, vel $p = q - \frac{1}{3}a$: hunc ipsius p valorem substituendo, resultabit æquatio $q^3 + \overline{3x - a} \times q^2 + \overline{3x^2 - ax - \frac{2}{3}aa} \times q - \frac{8}{27}a^2x + a^3 = 0$, ubi termini $3qx^2$, $-a^2x$ dant $\frac{aa}{3x}$ pro termino tertio. Pone $q = r + \frac{aa}{3x}$, & illum valorem substituendo, neglectis terminis nulli usui futuris, habebis $\overline{3x^2 - ax} \times r = \frac{1}{27}a^3 - \frac{a^4}{9x}$ fere, unde $r = \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3}$ &c. Adeoque est

$$y = x - \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3} \text{ &c.}$$

Exemplum Secundum.

IN hoc Exemplo indices reperiuntur ope *Cor*.4. *Prop*.2.

Ex æquatione $x^3\dot{y} + ay\dot{x}x + a^2\dot{x}x - 2a^3\dot{x} = 0$ extrahendo fit radix y in serie ubi indices ipsius x perpetuo magis descendunt. Fluat x uniformiter, & sit $\dot{x} = 1$, atque æquatio evadet $x^3\dot{y} + axy + a^2x - 2a^3 = 0$. Pone $y = Ax^n$, erit $\dot{y} = nAx^{n-1}$, atque proveniet æquatio $nAx^{n-2} + aAx^{n+1} + a^2x - 2a^3 = 0$. Terminus jam altissimæ dignitatis in quo nec $\dot{y}$ neque y reperitur est a^2x, ubi index ipsius x est unitas: æquentur igitur indices terminorum reliquorum unitati, eritque 1^{mo}, $n+2=1$, unde $n = -1$; 2^{do}, erit $n+1=1$, unde $n=0$, quorum valorum minimus -1, est index ipsius x in primo termino seriei, & termini nAx^{n+2}, a^2x, vel $-Ax$, $+a^2x$ positi æquales nihilo dant $A = a^2$, unde est $\frac{a^2}{x}$ primus terminus seriei.

Operatio Secunda.

PRO terminis reliquis pone p, & erit $y = p + a^2x^{-1}$ $\dot{y} = \dot{p} - a^2x^{-2}$, unde orietur $x^3\dot{p} + axp - a^3 = 0$: ubi p, $\dot{p}$, vices subeunt ipsarum y, $\dot{y}$ in æquatione primâ. Sit $p = Ax^n$, $\dot{p} = nAx^{n-1}$; & prodibit $nAx^{n+2} + aAx^{n+1}$ $- a^3 = 0$; terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur est a^3, ubi index ipsius x est o; sit igitur $n+2 = 0$, & erit $n = -2$; Sit $n+1 = 0$, & erit $n = -1$;

quo

quorum numerorum minimus -2 est index ipsius x in secundo termino: & termini nAx^{n+2}, $-a^3$ positi æquales nihilo dant $A = \frac{1}{n}a^3x^{-2-n} = -\frac{1}{2}a^3$; ergo terminus secundus est $-\frac{a^3}{2x^2}$.

Operatio Tertia.

Pone $p = q - \frac{1}{2}a^3x^{-2}$, erit $\dot{p} = \dot{q} + a^3x^{-3}$, quos valores substituendo, orietur æquatio $x^3\dot{q} + axq - \frac{1}{2}a^4x^{-1} = 0$. Pone $q = Ax^n$, $\dot{q} = nAx^{n-1}$, & exurget $nAx^{n+2} + aAx^{n+1} - \frac{1}{2}a^4x^{-1} = 0$. Terminus unicus in quo nec q neque $\dot{q}$ reperitur est $-\frac{1}{2}a^4x^{-1}$, ubi index ipsius x est -1; jam ponendo $n+2 = -1$, erit $n = -3$; & ponendo $n+1 = -1$, erit $n = -2$, quorum minimus -3 est index quem quærimus, & termini nAx^{n+2}, $\frac{1}{2}a^4x^{-1}$, (quorum indices inter se æquati dant verum ipsius n valorem) positi æquales nihilo dant $A = -\frac{1}{6}a^4$ & inde terminus tertius est $-\frac{a^4}{6x^3}$.

Operatio Quarta.

Sit $q = r - \frac{1}{6}a^4x^{-3}$, $\dot{q} = \dot{r} + \frac{1}{2}a^4x^{-4}$, & evadet æquatio $x^3\dot{r} + axr - \frac{1}{6}a^5x^{-2} = 0$, ex quâ æquatione invenies terminum quartum esse $-\frac{a^5}{24x^4}$. Est

igi-

igitur $y = \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} - \frac{a^4}{6x^3} - \frac{a^5}{24x^4} -$ &c. hoc est,

$$y = \frac{a^2}{1.x} - \frac{a^3}{1.2.x^3} - \frac{a^4}{1.2.3.x^3} - \frac{a^5}{1.2.3.4.x^4}$$

$$- \frac{a^6}{1.2.3.4.5.x^5} \text{ \&c.}$$

Methodus hæc sigillatim inveniendi terminos est ad modum generalis, at plerumque nimis operosa. Est autem alia Methodus hasce radices extrahendi, quæ consistit in assumptione seriei universalis hujusmodi $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$ &c. & inde determinando Exponentes n, r, & Coefficientes A, B, C, D, &c. Hujus Methodi, longo tempore postquam D. *Newtono* innotuit, in Actis Eruditorum *Lipsiæ* D. *Leibnitius*, suo etiam nomine edidit Exemplum unum aut alterum in casibus facilioribus, ubi tantum docuit Coefficientium inventionem; at in indicum non in coefficientium inventione jacebat difficultas. Ideoque D. *Taylor*, in *Prop.* 9. Methodi *Incrementorum*, priusquam Coefficientes determinat, formam seriei invenire aggreditur. Estque ut sequitur.

Inveniatur (per *Prop.* 2. vel ejus *Coroll.*) index termini primi, vocetur is n, in æquatione pro $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. scribe x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, &c. respective, adeo ut termini resultantes componantur omnes ex x & datis quantitatibus: sit r maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, & forma seriei erit hæc $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$ &c. Erit vero r negativa aut affirmativa, prout quæris seriem

ex-

ex dignitatibus ipſius x deſcendentibus aut aſcendentibus confectam.

Exemplum Tertium.

ÆQuationis $y^3 + axy - x^3 = 0$, quæratur radix cum x eſt admodum magna. Invenio (per *Prop.* 2.) unitatem eſſe indicem ipſius x in primo termino ſeriei: pone igitur $y = x$, & æquatio evadet $x^3 + ax^2 - x^3 = 0$. Horum indicum 2, 3, 3 maximus communis diviſor eſt unitas, ergo ſeriei forma erit $y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + Ex^{-3} +$ &c. Sequitur operatio.

$$
\begin{array}{r|l}
y^3 = & A^3x^3 + 3A^2Bx^2 \left.\begin{array}{l} +3A^2C \\ +3AB^2 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +3A^2D \\ +6ABC \\ +BBB \end{array}\right\} x^0 \\
& \left.\begin{array}{l} +3A^2E \\ +6ABD \\ +3AC^2 \\ +3B^2C \end{array}\right\} x^{-1} + \text{\&c.} \\
-x^3 = & -x^3 \\
+axy = & \quad * \quad + aAx^2 \quad + aBx \quad + aCx^0 \\
& + aDx^{-1} + \text{\&c.}
\end{array}
$$

Comparando Coefficientes terminorum homologorum, erit $A^3 = 1$, unde $A = 1$. $3A^2B + aA = 0$, unde $B = -\frac{1}{3}a$. $3A^3C + 3AB^2 + aB = 0$, unde $C = 0$. $3A^2D + B^3 = 0$, unde $D = \frac{1}{81}a^3$. $3A^2E + 6ABD + aD = 0$, unde $E = \frac{1}{243}a^4$. &c. Ergo $y = x - \frac{1}{3}a + \frac{a^3}{81x^2} + \frac{a^4}{243x^2} +$ &c.

 Exem-

Exemplum Quartum.

Ex æquatione $x^2\dot{y}^2 - 3x^2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{x}^2x^2 - ax\dot{y}^2 + a^2\dot{x}^2 = 0$, extrahenda sit radix y in serie eo citius convergente quo major est x. Invenio formam seriei fore $y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + Ex^{-3} +$ &c. Fluat x uniformiter, existente $\dot{x} = 1$, ut in casibus hujusmodi vulgo fit; & evadet æquatio $\dot{y}^2 - 3x^2\dot{y} + 2x^2 - ax\dot{y}^2 + a^2 = 0$. Sequitur operatio.

$$\begin{array}{r|l}
\dot{y}^2 = & A^2x^2 + 2ABx \left.\begin{matrix}+2AC\\+2AB\end{matrix}\right\} x^0 \left.\begin{matrix}+2AD\\+2BC\end{matrix}\right\} x^{-1} \\
& \left.\begin{matrix}+2AE\\+2BD\\+CC\end{matrix}\right\} x^{-2} + \&c. \\
-3x^2\dot{y} = & -3Ax^2 \quad * \quad +3Cx^0 \quad +6Dx^{-1} \\
& +9Ex^{-2} + \&c. \\
+2x^2 = & +2x^2 \\
-ax\dot{y}^2 = & \quad * \quad -aA^2x \quad * \quad -2aACx^{-1} \\
& -4aADx^{-2} - \&c. \\
+a^2 = & \quad * \quad\quad * \quad +a^2x^0
\end{array}$$

Ex comparatione Coefficientium invenio

$A = 1$, $B = \frac{1}{2}a$, $C = -\frac{1}{4}aa$, $D = -\frac{1}{32}a^3$, $E = -\frac{5}{352}a^4$, &c.
$A = 2$, $B = a$, $C = -\frac{2}{7}aa$, $D = -\frac{2}{35}a^3$, $E = -\frac{104}{3185}a^4$, &c.

$$\text{Ergo } y = \begin{cases} x + \frac{1}{2}a - \dfrac{a^2}{4x} - \dfrac{a^3}{32x^2} - \dfrac{5a^4}{352x^3} \ \&c. \\[2ex] 2x + a - \dfrac{2a^2}{7x} - \dfrac{2a^3}{35x^2} - \dfrac{104a^4}{3185x^3} \ \&c. \end{cases}$$

Radi-

Radices ejusdem æquationis cum x *est valde parva.*

Invenietur forma seriei hæc, $y = Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{1} + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^{2} + Ex^{\frac{5}{2}} +$ &c. Sequitur operatio.

$$
\begin{array}{r|l}
+aa = & +aa \\
-axy^2 = & -\frac{1}{4}aA^2 - aABx^{\frac{1}{2}} \left.\begin{array}{l} -\frac{3}{2}aAC \\ -aBB \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} -2aAD \\ -2aBC \end{array}\right\} x^{\frac{2}{3}} \\
 & \left.\begin{array}{l} -\frac{5}{2}aAE \\ -4aBD \\ -\frac{9}{4}aCC \end{array}\right\} x^2 - \&c. \\
+yy = & \quad * \qquad * \qquad A^2x \qquad + - ABx^{\frac{3}{4}} \\
 & \left.\begin{array}{l} +2AC \\ +BB \end{array}\right\} x^2 + \&c. \\
-3x^2y = & \quad * \qquad * \qquad * \qquad -\frac{3}{2}Ax^{\frac{3}{2}} \\
 & -3Bx^2 - \&c. \\
+2x^2 = & \quad * \qquad * \qquad * \qquad * \\
 & +2x^2
\end{array}
$$

$$
\text{Unde} \left\{ \begin{array}{l}
A = +2\sqrt{a},\ B = 0,\ C = +\dfrac{4\sqrt{a}}{3a},\ D = -\dfrac{3}{4a}, \\
E = +\dfrac{2\sqrt{a}}{3aa},\ \&c. \\
A = -2\sqrt{a},\ B = 0,\ C = -\dfrac{4\sqrt{a}}{3a},\ D = -\dfrac{3}{4a}. \\
E = -\dfrac{2\sqrt{a}}{3aa},\ \&c.
\end{array} \right.
$$

$$
\text{Ergo } y = \left\{ \begin{array}{l}
+2\sqrt{ax} + \dfrac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \dfrac{3x^2}{4a} + \dfrac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa}\ \&c. \\
-2\sqrt{ax} - \dfrac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \dfrac{3x^2}{4a} - \dfrac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa}\ \&c.
\end{array} \right.
$$

 Sed

Sed ut verum quod eſt confiteamur, hæc methodus D. *Taylor* inveniendi formam ſeriei non eſt generalis. Imo impoſſibile eſt univerſaliter determinare formam ſeriei ex datâ formâ æquationis; pendet enim forma ſeriei tam ex coefficientibus, quam ex exponentibus indeterminatarum in æquatione. Sint enim duæ æquationes $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 + x^2y = 0$, $y^3 - ay^2 + a^2y - a^3 + x^2y = 0$ eædem omnino quoad formam, in priore eſt $y = a - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}}$ &c. in poſteriore eſt $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2a^3}$, &c. Et juxta Regulam D. *Taylor*, utraque ſeries habere debet eandem formam, quam habet poſterior. Fallit dicta Regula quotieſcunque coincidunt duo vel plures valores termini primi ſeriei: hoc eſt, quando ordinata prima tangit curvam vel tranſit per punctum ejus duplex: vel quando ordinata ad diſtantiam infinitam tranſit per plura curvæ puncta infinite propinqua ad ſe invicem. Inveni autem ſequentem regulam pro inveniendâ formâ ſeriei quantum hactenus conſtitit nunquam fallere, ſed illam eſſe ubique veram affirmare non audeo, propterea quod in eam caſu tantum incidi, (obſervando ſcilicet plurimas ſeries diverſas) & ejus demonſtrationem poſtea fruſtra quæſivi.

Methodus determinandi formam Seriei.

INveniatur index primi termini, vocetur is n, in æquatione pro y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, &c. ſcribe x^n, x^{n-1}, x^{n-2} &c. re-

respective, adeo ut termini resultantes componantur ex x & datis quantitatibus: sit m maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, p numerus valorum primi termini qui inter se æquantur, & $r = \frac{m}{p}$, atque forma seriei hæc erit $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + \&c.$

Coincidit hæc regula cum regula D. *Taylor* quando p est unitas, hoc est, quando primus terminus non habet plures valores æquales.

Exemplum Quartum.

EX æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$, extrahenda sit radix y in serie eo citius convergente quo major est x. Invenies ope rectanguli primum terminum esse x, quem scribe pro y & æquatio evadet $x^3 - 2x^3 + x^3 - a^3 = 0$. Indices terminorum sunt 3, 3, 3, 0, quorum maximus communis divisor est 3. & æquatio $y^3 - 2xy^2 + x^2y = 0$ quæ dat primum terminum habet duas radices inter se æquales; igitur est $m = 3$, $p = 2$, & $\frac{m}{p} = \frac{3}{4} = r$, unde forma seriei hæc est $y = Ax + Bx^{-\frac{1}{2}} + Cx^{-2} + Dx^{-\frac{7}{2}} + \&c.$

Estque

Estque operatio ut sequitur.

$$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^{+\frac{3}{2}} \left.\begin{matrix} +3A^2C \\ +3AB^2 \end{matrix}\right\} x^0 \left.\begin{matrix} +3A^2D \\ +6ABC \\ +B^3 \end{matrix}\right\} x^{-\frac{3}{2}} \left.\begin{matrix} +3A^2E \\ +6ABD \\ +3AC^2 \\ +3B^2C \end{matrix}\right\} x^{-3} + \&c.$$

$$-2xy^2 = -2A^2x^3 - 4ABx^{\frac{3}{2}} \left.\begin{matrix} -4AC \\ -2B^2 \end{matrix}\right\} x^0 \left.\begin{matrix} -4AD \\ -4BC \end{matrix}\right\} x^{-\frac{3}{2}} \left.\begin{matrix} -4AE \\ -4BD \\ -2CC \end{matrix}\right\} x^{-3} - \&c.$$

$$+x^2y = Ax^3 + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^0 + Dx^{-\frac{3}{2}} + Ex^{-3} + \&c.$$

$$-a^3 = -a^3x^0$$

Primo igitur habemus æquationem, $A^3 - 2A^2 + A = 0$, unde est $A = +1$, $A = +1$, & $A = 0$. Secundo est $3A^2B - 4AB + B = 0$, vel $3B - 4B + B = 0$, sed inde nihil colligitur. Tertio est $3A^2C + 3AB^2 - 4AC - 2B^2 + C - a^3 = 0$, vel $3AB^2 - 2B^2 - a^3 = 0$, unde est $B = \pm a^{\frac{3}{2}}$, Quarto est $3A^2D + 6ABC + B^3 - 4AD - 4BC + D = 0$, id est, $6ABC + B^3 - 4BC = 0$, ergo est $C = -\frac{a^3}{2}$, Et quinto invenietur $D = \frac{7}{8}a^{\frac{5}{2}}$ quando pro B scribitur $+a^{\frac{3}{2}}$, Sed erit $= -\frac{7}{8}a^{\frac{5}{2}}$, quando pro B scribitur $-a^{\frac{3}{2}}$. Adeoque est radix

$y=$

$$y = \begin{cases} x + \dfrac{aa}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^3}{2x^2} + \dfrac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \ \&c. \\ x - \dfrac{aa}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^3}{2x^2} - \dfrac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \ \&c. \end{cases}$$

Hic in determinatione Coefficientium obſervandum eſt quod ex ſecundâ æquatione $3A^2B - 4AB + B = 0$ terminus ſecundus B non reperiebatur. Idem ſemper notandum eſt quotieſcunque terminus primus habet plures valores inter ſe æquales. Nam ſi termini primi omnes valores ſunt inter ſe diverſi, terminus ſecundus & reliqui omnes in infinitum habebunt niſi unicum valorem & per diviſionem ſemper prodibunt. At ſi terminus primus habet plures valores inter ſe æquales, tot diverſos valores neceſſario habebit terminus ſecundus; qui itaque per diviſionem inveniri nequit, ſed radix erit æquationis tot dimenſionum quot ipſe habet valores. Unde in comparatione Coefficientium ſecundus terminus B ex æquatione ſecundâ non ſemper invenitur: Sed ponendo Coefficientes terminorum homologorum æquales nihil, membra omnia ſe mutuo ſemper deſtruent uſque dum pervenietur ad terminum in cujus coefficiente reperitur terminus ſecundus tot dimenſionum quot ipſe habet valores. Sed hæc omnia experientiâ multo melius quam verbis patebunt.

Conſiderando Curvarum Tangentes, Curvaturam, Variationem Curvaturæ, Variationem

Vari-

Variationis, *&c.* quæ determinari solent Fluxionum ope, determinari etiam posse ope terminorum seriei, ut innuit D. *Neutonus* ad Prop. 10. Lib. 2. *Principiorum*; statim cognovi Incrementa prima, secunda, tertia, *&c.* relationem quandam habere ad seriei terminos respectivos, adeoque terminos illos determinari ex Fluxionibus. Ideo quærebam relationem illam & tandem inveni ut sequitur.

PROP. III. THEOR.

SIT $y = A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + \&c.$ erit

$$B = \frac{\dot{y}}{1.r\dot{x}},\quad C = \frac{\ddot{y}}{1.2.r^2\dot{x}^2},\quad D = \frac{\dddot{y}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3}$$

$$E = \frac{\ddddot{y}}{1.2.3.4.r^4\dot{x}^4}$$ &c. adeoque est $y = A + \frac{x\dot{y}}{1.r\dot{x}}$

$$+ \frac{x^2\ddot{y}}{1.2.r^2\dot{x}^2} + \frac{x^3\dddot{y}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3} + \&c.$$

Demonstratio.

Fluat x^r uniformiter, & sit ejus Fluxio $rx^{r-1}\dot{x} = 1$, vel $\dot{x} = \frac{1}{r}x^{1-r}$. Et erit $\dot{y} = rBx^{r-1}\dot{x} + 2rCx^{2r-1}\dot{x} + 3rDx^{3r-1}\dot{x} + 4rEx^{4r-1}\dot{x} + \&c.$ ubi si pro $\dot{x}$ ponas ejus valorem $\frac{1}{r}x^{1-r}$ erit $\dot{y} = B + 2Cx^r + 3Dx^{2r}$

+4E

$+ 4Ex^{3r} +$ &c. Et inde $\ddot{y} = 2rCx^{r-1}\dot{x} + 6rDx^{2r-1}\dot{x} + 12rEx^{3r-1}\dot{x} +$ &c. vel ponendo pro $\dot{x}$, $\frac{1}{r}x^{1-r}$ $\ddot{y} = 2C + 6Dx^{r} + 12Ex^{2r} +$ &c. unde $\dddot{y} = 6rDx^{r-1}\dot{x} + 24rEx^{2r-1}\dot{x} +$ &c. id est, $\dddot{y} = 6D + 24Ex^{r} +$ &c. adeoque $\ddddot{y} = 24rEx^{r-1}\dot{x} +$ &c. $= 24E +$ &c. Jam sit x infinite magna vel infinite parva, prout r est numerus negativus aut affirmativus, & erit accurate $\dot{y} = B$, $\ddot{y} = 2C$, $\dddot{y} = 6D$, $\ddddot{y} = 24E$, &c. ergo vicissim est $B = \dot{y}$, $C = \frac{1}{2}\ddot{y}$, $D = \frac{1}{6}\dddot{y}$, $E = \frac{1}{24}\ddddot{y}$, &c. Hisce valoribus ipsorum B, C, D, E, &c. substitutis orietur $y = A + x^{r}\dot{y} + \frac{1}{2}x^{2r}\ddot{y} + \frac{1}{6}x^{3r}\dddot{y} + \frac{1}{24}x^{4r}\ddddot{y} +$ &c. Sed erat $\dot{x} = \frac{1}{r}x^{1-r}$, ideoque est $x^{r} = \frac{x}{\dot{x}r}$ quem ipsius x^{r} valorem substitue ut termini evadant homogenei, & prodibit $y = A + \frac{x\dot{y}}{1.r\dot{x}} + \frac{x^{2}\ddot{y}}{1.2.r^{2}\dot{x}^{2}} + \frac{x^{3}\dddot{y}}{1.2.3.r^{3}\dot{x}^{3}} + \frac{x^{4}\ddddot{y}}{1.2.3.4.r^{4}\dot{x}^{4}} +$ &c. Q. E. D.

Coroll. Sit $y = Ax^{n} + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$ &c. id est $y = x^{n} \times \overline{A + Bx^{r} + Cx^{2r} + Dx^{3r} + \&c.}$ pone $y = vx^{n}$, & erit $v = A + Bx^{r} + Cx^{2r} + Dx^{3r} +$ &c. Unde per hanc Propositionem est $v = A + \frac{x\dot{v}}{1.r\dot{x}}$

$+$

$$+\frac{x^2\ddot{v}}{1.2.r^2x^2}+\frac{x^3\dddot{v}}{1.2.3.r^3x^3}+\&c.\quad \text{Ergo est } y = x^n \times \overline{A}$$

$$\overline{+\frac{x\dot{v}}{1.rx}+\frac{x^2\ddot{v}}{1.2.r^2x^2}+\frac{x^3\dddot{v}}{1.2.3.r^3x^3}+\&c.}$$

Ut habeantur Fluxiones ipsius v, pro y in æquatione substitue vx^n, & orietur æquatio nova relationem inter x & v definiens, ex qua invenies fluxiones illas.

Exemplum Primum.

Ex æquatione $y^4 - a^3y = ax^3 - a^3x$ extrahenda sit radix y. Invenio formam seriei fore $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. adeoque est $r = 1$. Et ideo fluit x uniformiter, unde per methodum Fluxionum directam est $4y^3\dot{y} - a^3\dot{y} = 3ax^2 - a^3$, $4y^3\ddot{y} - a^3\ddot{y} = 6ax - 12y^2\dot{y}^2$, $4y^3\dddot{y} - a^3\dddot{y} = 6a - 24y\dot{y}^3 - 36y^2\dot{y}\ddot{y}$, &c. unde $\dot{y} = \frac{3ax^2 - a^3}{4y^3 - a^3}$, ubi pro x scribe o, & pro y a, ejus valorem cum x est o, & erit $\dot{y} = \frac{-a^3}{4a^3 - a^3} = -\frac{1}{3}$:

$$\ddot{y} = \frac{6ax - 12y^2\dot{y}^2}{4y^3 - a^3} = \frac{-12 \times a^2 \times \frac{1}{9}}{3a^3} = \frac{-4}{9a};$$

$$\dddot{y} = \frac{6a - 24y\dot{y}^3 - 36y^2\dot{y}\ddot{y}}{4y^3 - 4^3} = \frac{6a + \frac{24}{27}a - \frac{36 \times 4a}{27}}{3a^3}$$

$= \frac{50}{27a^2}$. In serie generali hosce valores substitue, unitatem pro r & a pro A, atque proveniet $y = a - \frac{1}{3}x - \frac{2x^2}{9a} + \frac{25x^3}{81a}$ &c.

Exem-

Exemplum Secuudum.

Æquationis $y^3 + a^2y + x^2y - 2a^3 = 0$: quæratur radix y. Invenio formam seriei esse $A + Bx^2 + Cx^4 + \&c.$ igitur est $r = 2$, & x^2 fluit uniformiter, id est, $2x\dot{x} = 1$, & $\dot{x} = \frac{1}{2x}$. Capiendo fluxiones erit $3y^2\dot{y} + a^2\dot{y} + x^2\dot{y} = -2x\dot{x}y = -y$; $3y^2\ddot{y} + a^2\ddot{y} + x^2\ddot{y} = -2\dot{y} - 6y\dot{y}^2$, $3y^2\dddot{y} + a^2\dddot{y} + x^2\dddot{y} = -3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3$. Unde $\dot{y} = \frac{-y}{3y^2 + a^2}$, neglecto termino $x^2\dot{y}$, quoniam supponitur x evanescere; pro y pone a ejus valorem cum est $x = 0$, & erit $\dot{y} = -\frac{1}{4a}$, $\ddot{y} = \frac{-2\dot{y} - 6y\dot{y}^2}{3y^2 + a^2}$

$$= \frac{+\frac{2}{4a} - 6a \times \frac{1}{16a^2}}{4a^2} = \frac{1}{32a^3},\ \dddot{y} = \frac{-3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3}{3y^2 + a^2}$$

$$= \frac{\frac{-3}{32a^3} - 18a \times -\frac{1}{4a} \times \frac{1}{32a^3} + \frac{6}{64a^3}}{4a^2} = \frac{-9}{256a^5}.$$

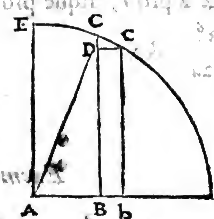
In serie generali pro A substitue a, & 2 pro r, atque proveniet $y = a - \frac{x^2}{4a} + \frac{x^4}{64a^3} - \frac{3x^6}{512a^5}$ &c.

Exemplum Tertium.

ELevanda sit binomium $a+x$ ad potestatem indeterminatam cujus index est n. Pone $y=\overline{a+x}|^n$; unde cum est $x=0$ evadit $y=a^n$, & inde in serie generali est $A=a^n$. Forma seriei hæc est $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c. ergo est $r=\dot{x}=1$. Capiendo fluxiones erit $a\dot{y}+x\dot{y}=ny$, $a\ddot{y}+x\ddot{y}=\overline{n-1}\times\dot{y}$, $a\dddot{y}+x\dddot{y}=\overline{n-2}\times\ddot{y}$, $a\ddddot{y}+x\ddddot{y}=\overline{n-3}\times\dddot{y}$, &c. Evanescat x, & erit $\dot{y}=na^{n-1}$, $\ddot{y}=n\times\overline{n-1}\times a^{n-2}$, $\dddot{y}=n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times a^{n-3}$, $\ddddot{y}=n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times a^{n-4}$, &c. In serie generali hosce valores substitue a^n pro A & unitatem pro r atque prodibit $y\left(=\overline{a+x}|^n\right)=a^n+na^{n-1}x$ $+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}x^2+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}x^3$ &c. Hoc modo patet quanta facilitate demonstratur Theorema D. *Neutoni*.

Exemplum Quartum.

EX dato arcu EC quæratur ejus Cosinus BC. Sit $EC=x$, $BC=y$, $Cc=\dot{x}$, $DC=\dot{y}$; Erit $AB=\sqrt{1-y^2}$, existente radio $AE=1$. Propter similia triangula ABC, CDc, $AC:AB::Cc:CD$, id est, $1:\sqrt{1-y^2}::\dot{x}:\dot{y}$, unde erit $\dot{y}^2=\dot{x}^2-\dot{x}^2y^2$. Forma seriei



riei hæc eſt $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 +$ &c. quæ continentur in hâc formâ, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c. igitur poteſt x vel x^2 fluere uniformiter quum quæruntur fluxiones ipſius y. Fluat x uniformiter & ſit $\dot{x} = 1$, atque æquatio evadet $\dot{y}^2 = 1 - y^2$, unde $2\dot{y}\ddot{y} = -2y\dot{y}$ vel $\ddot{y} = -y$, & inde $\dddot{y} = -\dot{y}$, $\ddddot{y} = -\ddot{y}$, $\overset{5}{y} = -\dddot{y}$, &c. Quoniam exiſtente arcu $EC = 0$, fit $y = AE = 1$, pro y ſubſtitue unitatem, & erit $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = -1$, $\dddot{y} = 0$, $\ddddot{y} = 1$, $\overset{5}{y} = 0$, &c. In ſerie generali pro hiſce fluxionibus hoſce valores ſubſtitue, unitatem pro A & unitatem pro r, atque provenict

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.} + \&c.$$

Et eodem modo invenire licet ſinum AB ex dato ejus arcu EC.

Ex hoc Exemplo conſtat operationem admodum alleviari ſupponendo x & non x^2 fluere uniformiter. Idem alibi notandum eſt, nam r (quæcunque ſit forma ſeriei) ad libitum fere ſumi poteſt. Ut ſi forma ſeriei quæſitæ eſſet $Ax^{\frac{3}{2}} + Bx^{\frac{7}{2}} + Dx^{\frac{11}{2}} + Ex^{\frac{15}{2}} +$ &c. ubi differentia Exponentium eſt 2, non opus eſt ut ſit $r = 2$, ſed poteſt eſſe quilibet numerorum ſequentium $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, &c.

Methodus hæc reducendi radices æquationum in ſeries convergentes, haud abſimilis eſt methodo aſſumendi ſeriem coefficientibus indeterminatis affectam; at plerumque minus operoſa, præſertim ſi deſiderentur

ſeriei

ſeriei termini tantum pauci initiales: hi ſufficiunt ad inveniendas Tangentes, Radios Curvaturæ Aſymptotos & ſimilia.

De Æquationum Reſolutione in numeris.

HÆC de æquationum reductione Literali dicta ſufficiant, de Numerali itaque adjicere pauca licet.

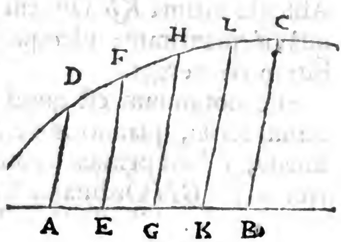
Omnis Æquationum Reductio, uti ſupra diximus, ex hoc pendet, ut primo aſſumatur quantitas radici quæſitæ æqualis proxime, & poſtea ut valor ille aſſumptus corrigatur. Exempli gratiâ, ſit æquatio Cubica $y^3 - 21y - 16 = 0$, cujus radix quæritur; & tentando, vel per Conſtructionem Geometricam invenio eſſe 5 numerum prope verum, itaque pro y ſubſtituo $p + 5$, & provenit æquatio nova $p^3 + 15p^2 + 54p + 4 = 0$; jam quoniam eſt y proxime æqualis 5, erit p quantitas admodum parva, & per conſequens ejus poteſtates altiores, erunt ipſo multo minores; neglectis igitur terminis minoribus p^3, $15p^2$ erit fere $54p + 4 = 0$, vel $p = -\frac{4}{54} = -,074$, ergo $p + 5 = y = 4,926$ proxime. Si quæritur radix magis accurata, pro p ponendum eſt $q - ,074$, atque operationem perficiendo invenies plures figuras radici jam inventæ adnectendas.

Hæc methodus ea eſt quam invenit & in Analyſi ſuâ tradidit D. *Neutonus*. Sunt & aliæ methodi idem perficiendi, qualis eſt ea *J. Ralphſon* & Cl. *Hallei*, ſed ex eâ jam traditâ omnes pendent & facile fluunt.

Hoc

Hoc modo reducuntur æquationes omnes vulgares, in quibus ſcilicet exiſtit unica tantum quantitas ignota: verum etiam æquationes hujuſmodi $y^y + 3^y - 7y = 0$ ſimili modo poſſunt reduci. Sed in æquationes iſtiuſmodi, quarum uſus nondum pene innotuit, tempus impendere jam non vacat. Æquationes fluxionales, quoniam in iis ſemper reperiuntur plures quantitates incognitæ utpote radix extrahenda cum fluxionibus ſuis, dicto modo ſunt irreducibiles. Ut ergo earum radices in numeris haberi poſſunt, ad ſeries confugiendum eſt. Ex ſeriebus enim, quotieſcunque ſat celeriter convergunt, expedite inveniuntur radices æquationum. Si quando non convergunt, tantum opus eſt (monente ipſo *Neutono* ſub finem *Analyſeos*) ut x, ſcilicet quantitas ex cujus poteſtatibus conficitur ſeries, aliquoties adhuc minor ſupponatur; adeoque radix non unica ſed pluribus ſeriebus habenda eſt. Quomodo vero hoc fit, ſtatim erit manifeſtum.

Sit curva DC cujus Abſciſſa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. Et quæratur y vel BC in numeris quando Abſciſſa evadit AB. Reducatur Ordinata in ſeriem, & ſi ſeries illa ſat cito convergat dabitur BC: at ſi non convergat, eouſque minui intelligatur



x ut

x ut tandem celeriter convergat ſeries; in illâ magnitudine ſit $x = AE$, & ſeries dabit in numeris Ordinatam *EF*. Jam ſumo novam Abſciſſam $EB = z$, & quæro relationem inter z & y; ex quâ invenietur valor ipſius y in ſerie ex poteſtatibus ipſius z confecta. Si ſeries illa ſat cito convergat, quum eſt $z = EB$, habemus quæſitum; at ſi non convergat, eodem modo minui jam intelligatur z quo prius x, ut convergat ſeries; ſit in illo caſu $z = EG$, & dabitur Ordinata *GH*. Rurſus ſit Abſciſſa tertia $GB = v$, & quæratur relatio inter v & y, quâ inventâ reducatur y in ſeriem ex dignitatibus ipſius v confectam; quæ ſi non aduc celeriter convergit, minuatur v & ſit ea $= GK$, quæ *GK* ſit tam parva ut ſeries ad libitum convergat, & dabitur Ordinata *KL*. Sumo quarto Abſciſſam $KB = u$, & quæro relationem inter u & y, ex quâ invenio valorem ordinatæ y in ſerie, quæ ſi cito convergat habemus ipſam *BC* quam quærimus. At ſi non convergit eodem modo continue procedere licet quo prius: atque ex tali proceſſu Abſciſſa ultima *KB* tandem evadet minor datâ quâvis quantitate; ideoque ſeries ultima ad libitum converget.

Hic notandum eſt quod eſt *AD* primus terminus ſeriei, quando *AE* eſt Abſciſſa & *EF* Ordinata, *EF* eſt primus terminus quando *EG* eſt Abſciſſa & *GH* Ordinata, *GH* eſt primus terminus quando *GK* eſt Abſciſſa & *KL* Ordinata, *KL* eſt primus terminus ſeriei quando *KB* eſt Abſciſſa & *BC* Ordinata. Ideoque priuſquam ha-

haberi poteſt Ordinata quævis ſubſequens, neceſſario habendæ ſunt omnes antecendentes, & ergo antequam ordinata *BC* inveniri poſſit, inveniendæ ſunt omnes aliæ. Adjiciendum jam eſſet Exemplum unum aut alterum, ſed methodum hanc per ſe ſatis patentem ducens, tædium calculi evitare inſtitui.

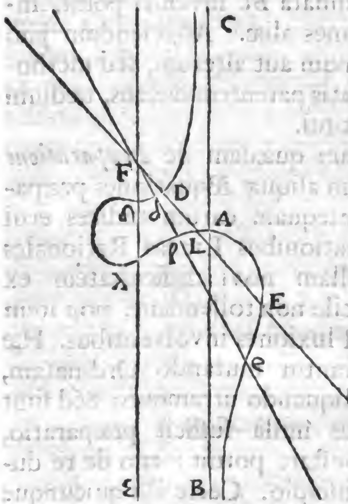
Subnecterem jam quædam de *Præparatione* Æquationum: nam aliquæ Æquationes præpatione indigent antequam earum radices erui poſſunt. In æquationibus Lineas Rationales deſignantibus nullam novi difficultatem ex hactenus dictis facile non tollendam: non item in Æquationibus Fluxiones involventibus. Hæ aliquando præparantur mutando Ordinatam, alias Abſciſſam, aliquando utramque: Sed ſunt æquationes quibus nulla ſufficit præparatio, quantum mihi conſtare potuit: ego de re dubiâ tractare non ſuſcipio. Certe illi quicunque hanc materiam aggreditur prodibunt calculi quorum onus ægre ſuſtinendum eſt.

PROP. IV. THEOR.

Aſymptotos recta decuſſare poteſt curvam in totidem punctis, demptis duobus, quot curva eſt dimenſionum & nunquam pluribus.

LInea quævis ſecari poteſt à rectâ in tot punctis quot ipſa eſt dimenſionum & nunquam pluribus, quoniam æquatio tot habere poteſt radices quot ipſa eſt dimenſionum & non plures. Sit jam v.g. linea tertii ordinis Aſymptoton

habens *BAC*. Duc rectam quamvis *FDLE* secantem curvam in tribus punctis *D*, *L*, *E*. In



hac recta sit punctum quodlibet *F*, circa quod tanquam polum gyretur recta *DE*, per situm *Fdle* tandem in situm *F* δ λ ε perveniens; ubi est Asymptoto parallela: & *E* unum intersectionis punctum abiit in infinitum: ideoque in illâ positione recta δ ε occurrit curvæ in duobus tantum punctis δ, λ. Moveatur recta δ λ motu parallelo donec tandem cum Asymptoto *BC* coëat, & in illo casu punctum δ etiam abibit in infinitum: restat igitur unicum punctum *A* in quo Asymptotos curvam decussare potest. Et similiter in ullo alio casu ostendetur duo intersectionis puncta abire in infinitum, hoc est, evanescere & nullibi reperiri. Proinde restabit numerus punctorum, in quibus Asymptotos decussare potest curvam, æqualis numero dimensionum curvæ dempto binario Q. E. D.

Coroll. 1. Linea secundi ordinis, id est, sectio Coni ejus Asymptoton non omnino decussat,

Li-

Linea tertii ordinis ejus Aſymptoton decuſſare poteſt in unico tantum puncto, Linea quarti ordinis in duobus & nunquam pluribus. Et ſic in aliis.

Coroll. 2. Linea ſecundi vel tertii ordinis Aſymptoton non tanget, Linea quarti vel quinti ordinis ejus Aſymptoton tangere poteſt in unico puncto. Et ſic porro. Liquet hoc Corollarium exinde quod punctum contactus conflatur ex pluribus interſectionum punctis in unum coeuntibus.

Coroll. 3. Si Linea quarti ordinis tangat ejus Aſymptoton, radius Curvaturæ in puncto contactus ſemper erit finitus: nam punctum illud contactus conflabitur ex duobus tantum interſectionum punctis.

Coroll. 4. Si duo crura Aſymptoton aliquam adjacentia, jaceant ad eaſdem ejus partes, vel ad contrarias & ſimul ad eandem plagam protenſa, tria ad minimum interſectionis puncta abeunt in infinitum.

Coroll. 5. Hinc colligimus maximum numerum Aſymptoton parallelarum quas Linea quævis habere poteſt, æqualem eſſe numero ejus dimenſionum demptâ unitate.

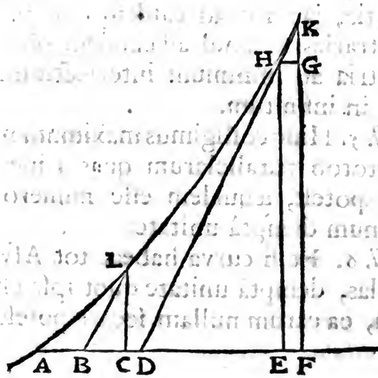
Coroll. 6. Et ſi curva habeat tot Aſymptotos parallelas, demptâ unitate quot ipſa eſt dimenſionum, ea earum nullam ſecare poteſt.

PROP. V. THEOR.

Si Ordinata curvæ parallela ſit Tangenti ad punctum infinite diſtans, Ordinata illa in æquatione curvam definiente non aſcendet ad tot dimenſiones quot eſt curva.

SIT *ALHK* crus curvæ infinitum, Abſciſſa $AC = x$, Ordinata $CL = y$, *DHK* tangens ad *H* punctum infinite diſtans, cui parallela ſit Ordinata $BL = v$, eique ſit correſpondens Abſciſſa $AB = z$. Dico in æquatione ad curvam quod v non aſcendet ad tot dimenſiones quot eſt curva.

Per *H* duc Ordinatam *HE*, cui prarallela *KGF*, exiſtente *EF* quam minima; ſit porro *GH*



Abſciſſæ parallela. Concipiatur punctum *L* abire in infinitum, adeo ut coëant puncta *L*, *H*;

B, *D*;

B, *D*; *C*, *E*; Et in illo caſu erit $AE = x$, $EH = y$, $GH = \dot{x}$, $GK = \dot{y}$, $AD = z$, $DH = v$. Reducantur y in ſeriem hujuſmodi $Ax + Bx^{1-n} + Cx^{1-2n} + Dx^{1-3n} + \&c.$ eo citius convergentem quo major eſt x. Index ipſius x in primo termino ſeriei neceſſario erit unitas, quoniam ultima tagens *DH* datam ad Abſciſſam *AB* ſupponitur habere inclinationem. Erit $\dot{y} = A\dot{x} + \overline{1-n} \times Bx^{-n}\dot{x} + \overline{1-2n} \times Cx^{-2n}\dot{x} + \&c.$ Unde eſt $\dot{x} : \dot{y} :: 1 : A + \overline{1-n} \times Bx^{-n} + \overline{1-2n} \times Cx^{-2n} + \&c.$ vel ob ſimilia triangula *DEH*, *HGK* $1 : A + \overline{1-n} \times Bx^{-1} + \overline{1-2n} \times Cx^{-2n} + \&c. :: DE : y$; ideoque invenietur $DE = x + \frac{nB}{A}x^{1-n} + \&c.$ ponendo pro y ejus valorem in ſerie. Et $AD = AE - DE = -\frac{nB}{A}x^{1-n} + \&c.$ Sit jam x infinite magna, & erit accurate $y = EH = Ax$, $AD = -\frac{nB}{A}x^{1-n}$, quumque per naturam ſeriei ſit n numerus affirmativus, erit *AD* infinite minor *EH*, & etiam infinite minor *DH* quæ ad *EH* datam habet rationem: hoc eſt z infinite minor v, igitur in æquatione v non erit tot dimenſionum quot eſt z, adeoque nec tot quot eſt curva. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1. Igitur æquatio $x=a$ designat rectam, ubi ordinata y nullius est dimensionis, $\overline{x+a}\times y=bx^2+cx+d$ omnes secundi ordinis quæ pergunt in infinitum, $\overline{x+a}\times yy=\overline{bx^2+cx+d}\times y+ex^3+fx^2+gx+h$ omnes tertii ordinis: & sic in reliquis.

Coroll. 2. Si existente Abscissâ curvæ infinite magnâ, Ordinata sit aduc infinite major, ea parallela erit Tangenti Cruris Parabolici ad distantiam infinitam.

Coroll. 3. Sin Ordinata sit infinite magna, quum Abscissa non est infinite magna, ea parallela erit Asymptoto cruris Hyperbolici.

Coroll. 4. Constat methodus determinandi positionem Tangentium curvarum ad distantiam infinitam, id est positionem Ordinatarum quæ in æquatione non ascendent ad tot dimensiones quot est curva, scilicet ex ratione quam ad invicem habent x, y in ultimâ earum magnitudine: quæ ratio semper invenitur ope serierum convergentium.

Scholion.

POteram hanc Propositionem eodem modo demonstrasse quo priorem. Nam in æquatione tot semper peribunt Ordinatæ dimensiones, quot intersectionis ejus puncta abeunt in infinitum. Et si quando in aliquâ curvâ Ordinata non est tot dimensionum quot est curva, semper comcipiendum est puncta quædam intersectionis abire in infinitum: imo hoc in ipsis

ſis Ovalibus obtinet; nam concipiendum eſt eas habere puncta duplicia imaginaria ad diſtantiam infinitam. Finge enim curvam habere tot Aſymptotos quot habet dimenſiones, quarum nullæ duæ ſunt inter ſe parallelæ: atque Ordinatæ illis æquidiſtantes tot erunt dimenſionum quot eſt Curva, demptâ unitate. Concipe Aſymptotos plures motu angulari latas, donec tandem evadant parallelæ, & ordinatæ omnibus illis parallelæ perdent tot dimenſiones quot ſunt Aſymptoti æquidiſtantes. Quod ſi forte æquatio Aſymptotos duas vel plures determinans evadat impoſſibilis, evaneſcent Aſymptoti illæ cum earum cruribus; at Ordinatæ non erunt pluriûm dimenſionum quam antea erant: Atque hinc redditur ratio, quomodo in Ovalibus aliiſque curvis, Ordinatarum nulli tangenti ultimæ parallelarum evaneſcunt dimenſiones: ſequitur vero in illis caſibus dimenſionum evaneſcentium numerum ſemper eſſe parem, quoniam radicum impoſſibilium numerus eſt par. Si forte evenit, quod Ordinatæ unicæ Aſymptoto parallelæ perdunt plures dimenſiones, & nulla interim comparet æquatio, per cujus radicum impoſſibilitatem Aſymptoti reliquæ evanuerunt; tum concipe plures Aſymptotos in unam coire. In illis caſibus Aſymptotos ſemper habet crura plura ſolito ad eaſdem plagas extenſa. Numerus vero Aſymptoton coeuntium quas curva quævis habere poteſt, æqualis eſt numero Aſymptoton parallelarum quas habere poteſt; priuſquam enim coëunt evadunt parallelæ.

PROP.

PROP. VI. PROBL.

Invenire Asymptotos Curvarum.

EX datâ æquatione ad curvam reducatur Ordinata y in seriem hujusmodi $y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} +$ &c. eo citius covergentem quo major est Abscissa x: sume Ordinatam novam z æqualem terminis omnibus hujus seriei initialibus, qui augendo x non minuuntur: & Ordinatarum y, z differentia augendo x continue diminuetur, atque Ordinatæ ipsæ ad æqualitatem magis magisque tendent: Unde Linearum Abscissam communem x & Ordinatas y, z habentium Crura tanto propius ad se invicem continue accedunt, quanto magis producuntur, & tandem coincident: atque adeo z est Ordinata Asymptoti, quæ dabitur ex æquatione eam definiente. Q. E. I.

Coroll. 1. Igitur infinita sunt crurum genera, quo simplicior est ordinata z, eo simplicius erit crus: quod si sit z ordinata rectæ, crus erit Hyperbolicum.

Coroll. 2. Si primus terminus seriei, qui augendo x minuitur, sit affirmativus, Asymptotos jacet inter curvam & Abscissam; sin minus curva jacet inter Asymptoton & Abscissam. Nam terminus ille seriei evadit æqualis parti Ordinatæ inter crus & ejus Asymptoton interceptæ, ubi est x infinite magna.

Coroll.

Coroll. 3. Ordinatæ Ovalium reduci nequeunt in ſeries ad veritatem tanto magis accedentes quanto major eſt x. Nam ſi hoc fieri poſſit, Ordinata Ovalis eſſet quantitas realis cum Abſciſſa eſt infinite magna. Sed Ordinata Ovalis eſt imaginaria cum Abſciſſa eſt infinite magna. Unde liquet Methodus dignoſcendi Ovales.

Coroll. 4. Simili prorſus ratiocinio colligitur, quod ſi quando Ordinata curvæ evadere poſſit infinite magna, non item Abſciſſa; valor Ordinatæ habere nequit in ſerie eo citius convergente quo major eſt Abſciſſa.

Coroll. 5. Omnis Linea imparis cujuſque Ordinis pergit in infinitum. Etenim Linea ordinis imparis deſignatur æquatione imparium dimenſionum; adeoque ad minimum reperietur una ſeries eo citius convergens quo major eſt x, propterea quod æquatio imparium dimenſionum ad minimum unam habet radicem poſſibilem. Et ſeries iſtiuſmodi (per *Coroll.* 3.) ad Ovales non extenditur, ergo ad curvas quæ progrediuntur in infinitum.

Coroll. 6. Hinc etiam ſequitur, quod Ovalium tum Abſciſſæ tum Ordinatæ ſemper ſunt parium dimenſionum. Nam ſi eſſet alterutra imparium, curva (per *Coroll.* 5.) pergeret in infinitum.

Coroll. 7. Linea quævis tot habere poteſt Aſymptotos quot ipſa eſt dimenſionum & nunquam plures. Nam tot habere poteſt, quot habet radices æquatio quæ dat primum terminum ſeriei $Ax + Bx^{1-r} + Cx^{n-2r} +$ &c. id eſt quot curva

G eſt

est dimensionum, ut constat ex serierum doctrinâ.

Coroll. 8. Si terminorum initialium plures valores coincidant, Asymptoti plures in unam coibunt: & figura habebit crura plura solito ad easdem plagas extensa: ut accidit Conchoidi Veterum, quæ habet quatuor crura ad unicam Asymptoton jacentia.

Coroll 9. Si numerus dimensionum curvæ sit par, & numerus Asymptoton impar; vel si numerus dimensionum sit impar & numerus Asymptoton par, figura habebit duo crura ad unicam Asymptoton jacentia quæ in plagas easdem in infinitum serpunt.

Exempla.

1. SEries $x - \frac{1}{3}a + \frac{aa}{3x}$ &c. quam (in *Exemplo* 1. *Prop.* 2.) invenimus pro radice æqutionis $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere Asymptoton æquatione $z = x - \frac{1}{3}a$ designatam, adeoque ejus crura esse Hyperbolica. Et quia $\frac{aa}{3x}$, terminus primus seriei qui augendo x minuitur, est affirmativus, Asymptotos jacet (per *Coroll.* 2. *Prop.* 6.) inter Curvam & Abscissam. Et quoniam unica tantum series istiusmodi obtineri potest, Figura non habet nisi duo crura ad unicam Asymptoton rectam jacentia.

2. Se-

2. Series illa $\frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} - \frac{a^4}{6x^3}$ — &c. quam (in *Ex.* 2. *Prop.* 2.) invenimus pro radice æquationis $yx^3 + ayxx + a^2xx - 2a^3x = 0$ indicat Abſciſſam eſſe Aſymptoton habentem duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas oppoſitas extenſa.

3. Series $x - \frac{1}{3}a + \frac{a^3}{81x^2}$ &c. quæ eſt radix æquationis $y^3 + axy - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere duo crura ad eaſdem ejuſdem Aſymptoti rectæ partes jacentia & in plagas oppoſitas protenſa.

4. Series illæ duæ $x + \frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4x}$ &c. & $2x + a - \frac{2a^2}{7x}$ &c. quæ (in *Ex.* 4. *Prop.* 2.) prodiere pro radicibus æquationis $x^2y^2 - 3x^2xy + 2x^2x^2 - axy^2 + a^2x^2 = 0$ indicant illam æquationem deſignare curvam habentem duas Aſymptotos rectas, quarum quælibet habet duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas oppoſitas protenſa.

5. Series duæ $x + \frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2}$ &c. $x - \frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^4}$ &c. indicant duas Aſymptotos in unam coiſſe; & illam habere duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas eaſdem infinite progredientia. Adeoque Ordinatæ Aſymptoti illi parallelæ (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) erunt unius tantum dimenſionis. Habet vero curva aliam Aſymptoton quæ ex alia ſerie dabitur.

Scholion.

METhodus inveniendi Asymptotos in hâc Propositione exposita est maxime generalis; sunt & aliæ methodi quamplures particulares inveniendi Asymptotos rectas, quas tamen omnes comprehendit ea jam tradita: Considerari potest Asymptotos recta ut tangens ad punctum curvæ infinite distans, & hoc modo reducitur Asymptotôn doctrina ad doctrinam tangentium, vel considerari possunt Asymptoti tanquam extremæ crurum partes indirectum productæ. Sed omnes hæ methodi præsupponunt, aliquo saltem modo, serierum doctrinam.

Vide Fig. Prop. 5. Invenienda sit Asymptotos curvæ *ALH*, quam desinat æquatio $y^3 - axy - x^3 = 0$, ubi x & y easdem designant rectas quas in dictâ Propositione designabant. Capiatur æquationis Fluxio, & erit $3y^2\dot{y} - ax\dot{y} = 3x^2\dot{x} + ay\dot{x}$, unde $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 + ax : 3x^2 + ay$, hoc est, *HG* ad *GK* vel *DE* : *EH* :: $3y^2 - ax : 3x^2 + ay$, pro y substitue x ejus valorem, quum est x infinite magna, & erit *DE* : *EH* :: $3x^2 - ax : 3x^2 + ax$, & sumendo rationem ultimam *DE* : *EH* :: $3x^2 : 3x^2$, id est, in ratione æqualitatis. Datur igitur Asymptotos *DH* positione. Restat jam ut inveniatur in Abscissâ punctum *D* per quod transit Asymptotos. Quoniam mox ostensum est esse *DH* : *EH* vel $\dot{DE} : y :: 3y^2 - ax : 3x^2 + ay$, erit $DE = \dfrac{3y^3 - axy}{3x^2 + axy}$

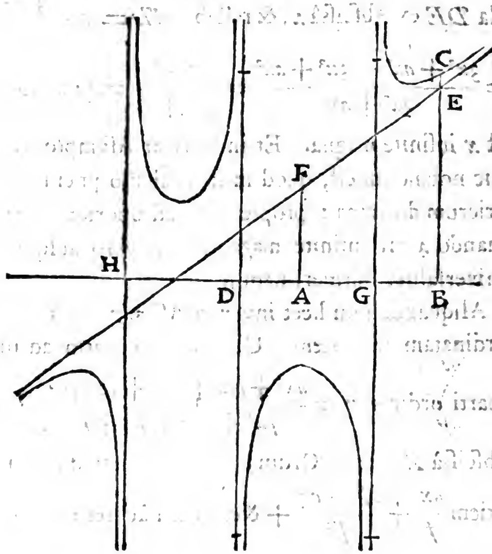
=

$=\frac{3x^3-ax^2}{3x^2+ax}$ ob y æqualem x. Subducatur jam recta illa DE ex Abſciſsâ x, & reſtabit $AD=x-\frac{3x^3-ax^2}{3x^2+ax}$ $=\frac{3x^3+ax^2-3x^3+ax^2}{3x^2+ax}=\frac{2ax^2}{3x^2+ax}=\frac{2}{3}a$; quoniam eſt x infinite magna. Et inde datur Aſymptotos DH. Hic notandum eſt, quod in hoc calculo præſupponitur ſerierum doctrina: propterea quod oportet invenire y quando x eſt infinite magna: hoc vero abſque ſerie univerſaliter obtineri nequit.

Aliquando non licet invenire Aſymptotos reducendo Ordinatam in ſeriem. Ut ſi eſſet æquatio ad lineam quarti ordinis $y=\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{fx^3+gx^2+hx+k}$; ubi eſt Abſciſsâ $AB=x$, Ordinata $BC=y$. Reducatur y in ſeriem $\frac{ax}{f}+\frac{bf-ag}{f^2}+$ &c. Ex hâc ſerie invenietur unica tantum Aſymptotos FE; reliquæ enim Aſymptoti, Ordinatæ parallelæ ex illâ non prodeunt: prodibunt tamen reducendo valorem Abſciſſæ in ſeriem ex dignitatibus Ordinatæ deſcendentibus confectam; ſed facilius hoc modo. Patet enim Ordinatam evadere infinite magnam, adeoque curvæ Aſymptoton, quotieſcunque quantitas fx^3+gx^2+hx+k evadit nihil: & hoc ter accidere poteſt, propter Æquationis Cubicæ $fx^3+gx^2+hx+k=0$ tres radices. Nam ſi Æquationis illius radices omnes ſint reales & inæquales, eæ

ſunto,

sunto *AG*, *AD*, *AH* & tres Ordinatæ per puncta *G*, *D*, *H* transeuntes erunt totidem Asymptoti. Quare



in illo casu curva habet omnino quatuor Asymptotos & octo crura adjacentia; uti in Schemate videre est. At si Æquationis illius duæ radices æquales sint, duæ Asymptoti coibunt; atque evanescunt crura quæ prius inter eas contenta erunt. Et curva habebit duas tantum Asymptotos cum sex cruribus. Si æquationis supradictæ radices omnes sint æquales, aut earum duæ imaginariæ, vel coibunt tres Asymptoti vel duæ evanescent, at in utroque casu figura habebit duas Asym-

ptotos

ptotos ſeſe ſecantes; in quarum angulis oppoſitis jacent Hyperbolæ oppoſitæ adinſtar Hyperbolæ Conicæ.

In Aſymptotôn rectarum inventione, non ſemper neceſſe habemus ad ſeries recurrere. Nam aſſumi poteſt æquatio univerſalis deſignans omnes curvas generis alicujus, & inde ſerierum ope conſtrui poteſt Canon generalis qui ſufficiat ad inventionem Aſymptotôn Linearum omnium illius ordinis. Ut ſi eſſet æquatio $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ ad Coniſectiones, ubi eſt x Abſciſſa, y Ordinata; Suppono y æqualem huic ſeriei $ax + b + cx^{-1} +$ &c. Et determinando Coefficientes, uti jam oſtenſum eſt, invenietur eſſe a radix æquationis $Aa^2 + Ba + C = 0$, unde dabitur a; eritque $b = -\frac{Da + E}{2aA + B}$, $c = -\frac{Ab^2 + Db + F}{2aA + B}$.

Si æquatio ſit $Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = 0$ ad Lineas tertii ordinis, erit a radix æquationis: $Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0$,

$b = -\frac{Aa^2 + Ba + C}{3Ea^2 + 2Fa + C}$ atque erit erit $c =$

$\frac{-3Aab^2 + Bb^2 + Eab + Fb + Ha + K}{3Aa^2 + 2Ba + C}$. Quibus expreſſionibus ſemel inventis, invenire licet Aſymptotos rectas harum curvarum abſque recurſione ad ſeries. Et notandum eſt quod a ſemper dat inclinationem Aſymptoti ad Abſciſſam, b dat diſtantiam inter principium Abſciſſæ & punctum in quo Aſymptotos eandem ſecat, c denique oſtendit ad quas Aſymptoton partes jacent

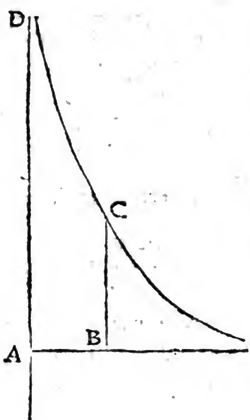
earum,

earum crura. Hæc omnia ex Propositione & ejus Corollariis admodum manifesta sunt.

PROP. VII. PROBL.

Invenire Numerum & Plagam crurum Asymptoton aliquam adjacentium.

CAS. 1. Sit primo curva, cujus Asymptotos recta *AD* per initium Abscissæ transiens, Abscissa *AB* $=x$, & ipsi *AD* parallela sit Ordinata *BC* $=y$. Reducatur y in seriem $\frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n-r}} + \frac{C}{x^{n-2r}}$ + &c. eo citius convergentem quo minor



est x. Et n index ipsius x semper erit affirmativus, propterea quod quum est x infinite parva, Ordinata y coincidit cum Asymptoto, & per consequens est infinite magna. Jam sit x infinite parva, & evadet $y = \frac{A}{x^n}$ accurate, qui valor est infinite magnus & affirmativus; quare curva habet crus unum ad easdem Asymptoti *AD* partes jacens cum Ordinata *BC*, & in easdem cum Ordinatâ partes ex-

extenſum. Mutari jam concipe ſignum ipſius x, & eam etiamnum manere infinite parvam; atque ſi n ſit numerus integer vel fractus cum Denominatore impare, figura habebit aliud crus ad alias Aſymptoti partes jacens, & in eaſdem cum priori plagas extenſum, ſi n eſt numerus par, at in oppoſitas ſi ſit n impar vel fractus cum Denominatore impare. Si vero ſit n fractio cum Denominatore pare, ſignum ipſius x mutari nequit, at Aſymptotos habebit duo crura ad eaſdem ejus partes jacentia & in plagas oppoſitas ſerpentia.

Caſ. 2. Si Aſymptotos ſit curva, numerus crurum dignoſcitur ex numero valorum Ordinatæ coeuntium, cum abſciſſa eſt infinite magna.

Si alii ſint ſerierum caſus alii itidem erunt crurum caſus, at eorum plagæ & numerus ſemper innoteſcent. Q. E. I.

Coroll. 1. Si n ſit numerus integer & par Aſymptotos habet duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas eaſdem progredientia.

Coroll. 2. Si n ſit integer & impar, vel fractus cum impare Denominatore, Aſymptotos habet duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas oppoſitas protenſa.

Coroll. 3. Si n ſit fractus cum Denominatore pare Aſymptotos habet duo crura ad eaſdem ejus partes jacentia & in plagas oppoſitas ſerpentia.

Coroll. 4. Hinc etiam comparantur longitudines Aſymptotôn inter ſe. Unde conſtabit quaſdam ad ſe invicem datam habere rationem,

alias vero esse aliis infinite majores vel minores.

Coroll. 5. Quamvis omnia crura cum Asymptotis suis tandem coincidere censenda sunt: tamen indistantiis æqualibus utcunque magnis aliqua crura ad Asymptotos suas aliis infinities propinquiora accedunt.

PROP. VIII. THEOR.

Æquatio $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 +$ &c. designat figuram habentem duo tantum crura infinita ad easdem vel oppositas plagas progredientia prout index dignitatis x in termino altissimo est numerus par vel impar.

Sensus Propositionis est, quod æquationes $y = a + bx$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$, &c. ubi indices terminorum altissimorum sunt numeri impares, designant figuras habentes duo tantum crura infinita ad oppositas plagas protensa; & quod æquationes $y = a + bx + cx^2$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, &c. ubi terminorum altissimorum indices sunt numeri pares, designant Figuras habentes duo tantum crura infinita ad eandem plagam pergentia.

Propositio vero sic demonstratur.

Concipe Abscissam x perpetuo augeri, & simul augebitur Ordinata y; sit x tandem infinite magna, & erit etiam y infinite magna; adeoque

que figura habet crus infinitum. Cum vero Ordinata y eſt infinite magna, pendet ejus ſignum, hoc eſt, plaga cruris infiniti, ex ſigno termini altiſſimi, quoniam in illo caſu is eſt reliquis infinite major. Evadat jam x negativa, id eſt ſumatur Abſciſſa ad alteras partes, & ad illas partes infinitum augeatur; atque etiam augebitur y inin finitum; unde curva habet crus aliud infinitum. Si index termini altiſſimi ſit par, ejus ſignum in utroque caſu idem eſt, ſin impar in uno caſu erit affirmativus, in altero negativus. Cum igitur plaga crurum pendet ex ſigno termini altiſſimi, in primo caſu pergent crura ad plagas eaſdem, in ſecundo ad oppoſitas. Q. E. D.

Pendet itaque tota hujus demonſtrationis vis ex termino altiſſimo; adeoque nihil refert quomodo ſeſe habeant termini intermedii. Eodem res redit, utrum affirmentur vel negentur; utrum ſint in æquatione vel non; nam demonſtratio ab illis minime turbabitur.

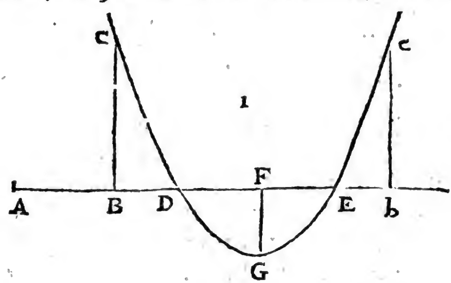
Scholion.

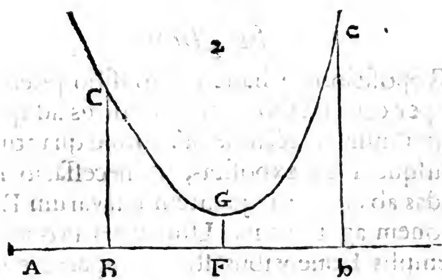
PRopoſitionem hanc eo conſilio præmiſi, ut per eam facilior pateret aditus ad quaſdam æquationum affectiones à nemine quantum ſcio hucuſque ſatis expoſitas, at neceſſario intelligendas ab eo qui ſequentem curvarum Enumerationem aggreditur. Uſus vero Propoſitionis Exemplis ſequentibus ſtatim apparebit in dignoſcendis realibus & imaginariis radicibus æquationum, idque vel calculo, vel deſcribendo cur-

vam; ſed & deſcribendo curvas conſtruuntur æquationes; ſatis quidem expedite, modo quis hâc methodo procedere aſſuetus ſit. Nam ſi æquatio ſit Cubica, ſufficicit invenire quinque vel ſex curvæ puncta; ſi Biquadratica, ſufficit invenire octo vel decem.

Exemplum Primum.

SIT $y = xx + Ax + B$ æquatio deſignans curvam habentem duo crura ad eaſdem plagas protenſa, cujus Abſciſſa $AB = x$, Ordinata





$BC = y$. AB vel ſecat curvam in duobus punctis (*D*, *E* *Fig.* 1.) vel in nullis (*Fig.* 2.) Sit jam

jam $y=0$, vel $xx+Ax+B=0$, & æquationis illius radices erunt *AD* & *AE* in *Figura* 1*ma*, at in *Figura* 2*da* ſunt imaginariæ. Vides igitur quod, in caſu primo, exiſtente Abſciſsâ minore minimâ radice *AD* vel majore maximâ *AE*, Ordinata correſpodens erit affirmativa: atque Ordinata inter puncta *D* & *E* erecta eſt negativa. Hæc autem omnia vera ſunt ex hypotheſi quod terminus altiſſimus *xx* ſit affirmativus. Igitur *D*, *E* ſunt limites in quibus Ordinata *y* nec affirmatur neque negatur ſed nulla eſt, hoc eſt in quibus quantitas $xx+Ax+B$ nec affirmatur neque negatur, ſed nihil eſt. Et Ordinatæ punctis *D*, *E* proxime & ad diverſas eorum partes jacentes, ſigna contraria ſemper habebunt. In caſu ſecundo quando Abſciſſa minime ſecat curvam, Ordinatæ omnes ejuſdem ſunt ſigni tendentes ad plagam crurum.

Supponamus jam eſſe aliam curvam eandem Abſciſſam *AB* habentem: Ordinatam vero quæ realis ſit quum Ordinata *y* eſt affirmativa, quæque imaginaria ſit quum *y* eſt negativa. Et in caſu primo quando æquationis $x^2+Ax+B=0$ radices ſunt reales (*Fig.* 1.) Ordinatæ novæ curvæ per puncta *D* & *E* tranſeuntes ſemper tangent curvam & puncta contactus erunt limites per quos Ordinatæ motu parallelo latæ tranſeunt ipſo temporis momento, quo evadunt poſſibiles ex impoſſibilibus, aut è contra. Atque Ordinatæ inter puncta *D*, *E* erectæ reales aut imaginariæ erunt prout negatur aut affirmatur terminus *xx*. Ordinatæ ad alia quævis Abſciſſæ puncta erectæ

rea-

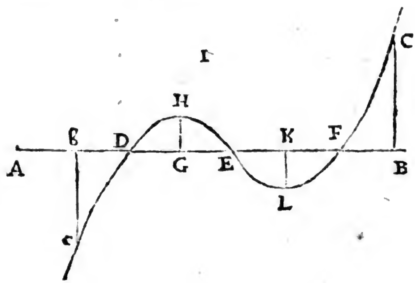
reales aut imaginariæ erunt prout affirmatur aut negatur terminus ille xx.

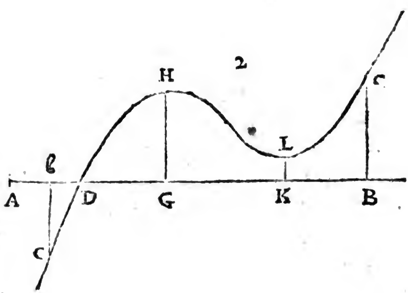
In casu secundo ubi Abscissa non secat curvam, Ordinatæ omnes hujus novæ curvæ reales quidem erunt quando affirmatur xx, sed omnes prorsus imaginariæ quando negatur idem terminus.

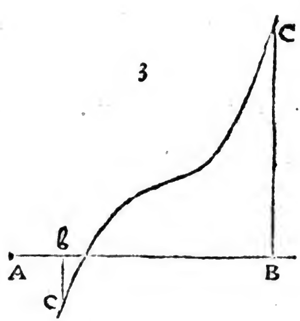
Sit FG ordinata maxima (*Fig.* 1.) inter puncta D, E erecta, at in Fig. 2. omnium minima, & in illo casu erit $\dot{y}=0$, vel $2\dot{x}x+A\dot{x}=0$, nude $x=-\frac{1}{2}A=AF$: quem valorem in æquatione pro x substitue, & invenies $y=B-\frac{1}{4}AA=FG$. Et patet quod Abscissa secat vel non secat curvam prout Ordinata illa FG tendit ad contrarias vel easdem plagas cum cruribus; hoc est, æquationis $xx+Ax+B=0$ radices sunt possibiles quando affirmatur quantitas $\frac{1}{4}AA-B$, & impossibiles quando negatur eadem.

Exemplum Secundum.

SIT æquatio $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ designans curvam habentem duo crura in plagas oppositas protensa, cujus Abscissa $AB=x$, Ordinata $BC=y$. AB vel secat curvam in tribus punctis (*Fig.* 1.) vel in unico (*Fig.* 2, 3.) Sit $(y=)\ x^3+Ax^2+Bx+C=0$, & hujus æquationis radices erunt AD, AE & AF. Igitur si radices omnes sint reales ut in Fig. 1. existente Abscissâ minore radice mediâ AE & majore minimâ AD, vel majore maximâ AF, ordinatæ valor respective erit affirmativus; & ordinatæ ad alia quæ-


1
C
H
β
D
K
F
A
G
E
B
L
c


2
H
C
L
β
A
D
G
K
B
c


3
C
β
A
B
c

quævis puncta erecta erunt negativæ. Negativæ enim & affirmativæ evadunt Ordinatæ ſemper per vices. Jam ſit alia curva cujus Ordinata poſſibilis ſit, quando y eſt affirmativa, impoſſibilis vero quando negativa; Et Ordinata illa nova ſubibit vices omnes poſſibilitatis, quas ſubit y mutationis ſignorum $+$ & $-$: ſcilicet tres Ordinatæ ad puncta *D*, *E*, *F* erectæ tangent curvam & puncta contactus erunt limites in quibus y incipit vel deſinit eſſe. Etſi Ordinatæ affirmativæ tendant ad eandem plagam cum Ordinata *BC*, intra limites *D*; *E* continebitur curva partem figuræ conſtituens: jacebit vero altera pars figuræ ad eaſdem partes puncti *F* cum *BC*: & ſemper progredietur in infinitum ab *F* verſus *B*, quoniam unicus illi tantum adeſt limes. In caſu altero, ubi Abſciſſa ſecat curvam in unico puncto (*Fig.* 2. 3.) Si x^3 terminus altiſſimus affirmatur, ordinatæ omnis negativæ aut affirmativæ erunt, prout jacent ad partes puncti *D* eaſdem vel contrarias iis ad quas jacet *A*. Et omnia quæ de primo caſu dicta ſunt, ad hunc caſum mutatis mutandis facile accomodantur.

Methodus determinandi Radices reales & imaginarias Æquationes Cubicæ.

POne $y=0$, & erit $3x^2+2Ax+B=0$; cujus æquationis radices reales in *Fig.* 1ma & 2da, ſcilicet *AG*, *AK*, at impoſſibiles in *Fig.* 3^{tia}. Igitur ſi æquationes $3x^2+2Ax+B=0$ radices ſint

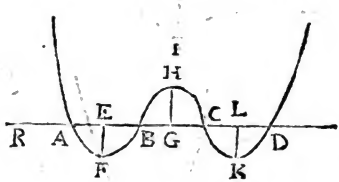
ſint impoſſibiles, id eſt, (per *Exemp.* 1.) Si $\frac{1}{9}AA - \frac{1}{3}B$ vel $\frac{1}{3}AA - B$ ſit negativa quantitas, æquationis $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ radices duæ erunt imaginariæ. At ſi æquationis $3x^2 + 2Ax + B$ radices ſint reales ut in *Fig.* 1, 2. æquationis $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ radices omnes ſunt reales ubi Ordinatæ GH, KL contraria habent ſigna, *Fig.* 1. & imaginariæ quando eadem habet *Fig.* 2. Pone $DD = AA - 3B$, invenies $GH = C$

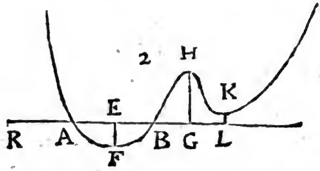
$$+ \frac{2A^3 - 9AB + 2D}{27}, \; LK = C + \frac{2A^3 - 9AB - 2D^3}{27}.$$

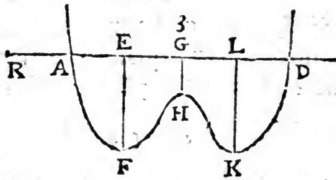
Et hiſce valoribus ſemel inventis, facile eſt invenire quæ radices reales ſunt, quæ non.

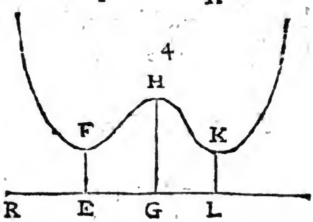
Exemplum Tertium.

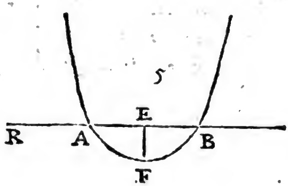
SIT jam $y = x^4 + Bx^3 + Cx^2 Dx + E$ æquatio deſignans Lineam habentem duo crura infinita ad eaſdem plagas protenſa. Pone $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$; hujus æquationis radices quatuor (*Fig.* 1.) ſunt RA, RB, RC, RD,

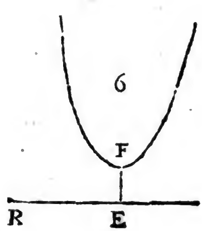



2
H
K
E
R
A
F
B
G
L


3
E
G
L
R
A
D
H
F
K


4
H
F
K
R
E
G
L


5
E
R
A
B
F


6
F
R
E

at in *Fig.* 2, 3, 5, duæ radices impoſſibiles, & in *Fig.* 4, 6. omnes ſunt impoſſibiles. Pone $y=0$, & erit $4x^3+3Bx^2+2Cx+D=0$, cujus æquationis tres radices (*Fig.* 1, 2, 3, 4.) ſunt RE, RG, KL: at in *Fig.* 5, 6. æquatio illa unicam tantum habet radicem RE. In primo caſu (*Fig.* 1) ſi Ordinatarum EF,GH,LK, duæ ſunt negativæ, & tertia affirmativa, æquatio $x^4+Bx^3+Cx^2+Dx\,E=0$ habet quatuor radices poſſibiles. Si ordinatarum duæ ſint affirmativæ & tertia negativa (*Fig.* 2.) vel ſi omnes tres ſint negativæ (*Fig.* 3.) æquatio non habet niſi duas radices reales: Si ordinatæ omnes ſint affirmativæ (*Fig.* 4.) radices omnes erunt impoſſibiles.

In ſecundo caſu quando æquationis $4x^3+3Bx^2+2Cx+D=0$ radix unica erat poſſibilis (*Fig.* 5, 6.) ſi ordinata EF ſit negativa (*Fig.* 5.) radices duæ erunt reales tantum: at ſi ordinata illa ſit affirmativa (*Fig.* 6.) omnes radices erunt imaginariæ. Hi ſunt Caſus Æquationis Biquadraticæ.

Unde inveniri poteſt Canon generalis pro dignoſcendis radicibus realibus & imaginariis æquationum Biquadraticarum, ut in *Exemplis primo* & *ſecundo* fecimus pro æquationibus Quadraticis & Cubicis. Hoc vero prolixum admodum requirit calculum. Sufficiat quod novimus quomodo tractanda eſt æquatio particularis, ubi calculus non erit adeo laborioſus. Eadem methodus ad omnes æquationes extenditur. Si ſit nova curva ordinatam habens realem quando

hujus est affirmativa & imaginariam quando hujus curvæ ordinata est negativa; vices omnes possibilitates & impssibilitatis facillime innotescunt per ea quam diximus in *Exemplis duobus primis*.

Ex hisce Exemplis satis apparet numerum radicum impossibilium semper esse parem. Item sequitur, quod si sit æquatio $x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \&c. = 0$. & sit $B^2 - C \times n^2 \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \overline{n-4} \times \&c.$ quantitas negativa, æquatio illa ad minimum habebit duas radices imaginarias. Continuanda vero est series $n^2 \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \&c.$ donec n per continuam unitatis subductionem tandem exhauriatur. Et si desit terminus secundus Bx^{n-1}, & Cx^{n-2} huic proximus sit affirmativus, æquatio ad minimum habebit duas radices imaginarias.

Ex Propositionibus hactenus traditis invenire licet genus, positionem, plagam & numerum crurum infinitorum: & ex hâc Propositione ejusque Exemplis invenies quæ crura conjunguntur: adeoque invenies formam curvæ. Et faciendo rectam gyrare circa punctum aliquod idoneum & secare Parabolas quas in hâc Propositione descripsimus, habebuntur omnes casus alicujus æquationis radicum possibiles; hoc est, omnes formæ curvarum quas æquatio generalis designat: & inde enumerantur Linearum species, siquidem species curvarum non tam ab ipsarum intimâ naturâ, quam à forma pendere volumus.

Pro-

Propositiones quæ sequuntur continent consimiles aliquot curvarum Rationalium proprietates ab æquationum naturâ immediate fluentes.

PROP. IX. PROBL.

Invenire numerum punctorum quæ determinant Lineam alicujus ordinis.

Linea quævis describi potest per tot puncta, quot sunt Coefficientes in æquatione generalissimâ eam definiente & non plura; ut constat ex methodo D. *Neutoni* universali describendi curvas per data totidem puncta quot eas determinant: cujus specimen dedit in sectionibus Conicis ad Algebræ suæ Problemata 54, 57. Et hactenus annotatum est, quod existente n numero dimensionum curvæ, erit $\frac{n^2+3n}{2}$ numerus Coefficientium in æquatione generalissimâ Lineas omnes alicujus ordinis definiente; & proinde etiam erit $\frac{n^2+3n}{2}$ numerus punctorum determinantium curvam cujus dimensio est n.

Itaque recta determinatur ex duobus punctis, sectio Coni ex quinque; Linea tertii Ordinis ex novem, Linea quarti ex quartuordecem. Et sic porro.

Coroll. 1. Ex dato numero punctorum determinantium dabitur dimensio curvæ. Sit enim

m pun-

m punctorum numerus, & erit $m = \frac{n^2 + 3n}{2}$.

Unde & vicissim invenies $n = \frac{-3 + \sqrt{8m + 9}}{2}$.

Ut si esset $m = 20$, invenies $n = 5$.

Coroll. 2. Ex hâc Propositione invenies numerum punctorum quæ determinant Lineam aliquam particularem, si possibile sit, sunt enim quædam Lineæ quas nullus punctorum numerus determinat.

Exempla.

1. SIT $y = ax + b \pm \sqrt{cx + d}$ æquatio generalissima ad Parabolam Conicam: quum igitur quatuor tantum sunt Coefficientes, Parabola determinatur ex quatuor punctis. Quatuor puncta non sufficiunt ad determinandam Hyperbolam aut Ellipsin sed quinque nimia sunt.

2. Item sectio Coni cujus datur Diameter, & angulus Ordinatarum, determinatur ex tribus punctis, Parabola ex duobus; duo non sufficiunt ad determinandam Hyperbolam aut Ellipsin, sed tria nimia sunt.

3. Hyperbola Conica, datâ positione ejus Asymptoto, determinatur ex quatuor punctis.

4. Parabola Conica, datâ positione ejus axe, determinatur ex tribus punctis.

5. Parabolæ quinque *divergentes*, datâ plagâ crurum, determinantur ex ſex punctis; Parabola *Carteſii* ex quinque; Parabola *Cubica* ex quatuor.

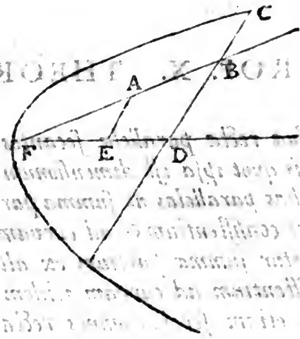
PROP. X. THEOR.

Ducantur duæ rectæ parallelæ ſecantes curvam in tot punctis quot ipſa eſt dimenſionum; recta quæ ita ſecat has parallelas ut ſumma partium ex uno ejus latere conſiſtentium & ad curvam terminatarum æquetur ſummæ partium ex altero ejus latere conſiſtentium ad curvam itidem terminatarum, ita etiam ſecabit omnes rectas hiſce parallelas.

SIT enim curvæ alicujus Abſciſſa $AB = x$, Ordinata $BC = y$, Æquationis relationem inter x & y definientis terminus ſecundus ſit $\overline{ax + b} \times y^{n-1}$: ſume in rectâ AB, $AF = \frac{-b}{a}$, & ordinatæ parallelam $AE = \frac{-b}{n}$; junge EF; ſi ea ſumatur pro Abſciſsâ, dico ſummam Ordinatarum ex unâ ejus parte æquari ſummæ Ordinatarum ex alterâ parte.

Nam ſit $y + \overline{ax + b} \times y^{n-1} + \&c. = 0$ æquatio exprimens relationem inte x, y. Producatur CB ſecans FE in D & ſit abſciſſa nova $ED = z$, Or-

Ordinata nova $DC = v$: ponatur $AB :: ED :: A : 1$, id eſt $x : z :: A : 1$, unde $x = Az$. $FA : AE$



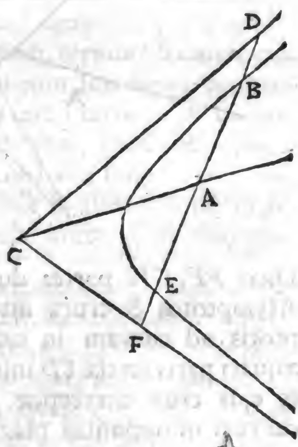
$:: FB : BD$, vel $\frac{-b}{a} : \frac{-b}{n} :: Az + \frac{b}{a} : BD$ $= \frac{aAz + b}{n}$. $BC = DC - DB = v - \frac{aAz + b}{n} = y$, unde (per Theor. D. *Neutoni*) $y^n = v^n - \overline{aAz + b} \times v^{n-1}$ &c. $y^{n-1} = v^{n-1}$ &c. Hoſce valores ſubſtitue in æquatione $y^n + \overline{ax + b} \times y^{n-1} + \&c. = 0$, & videbis v^{n-1} evaneſcere, id eſt æquationis terminum ſecundum deeſſe: igitur valores ipſius x erunt partim negativi & partim affirmativi, & ſumma affirmativorum æquabitur ſummæ negativorum: vel, quod perinde eſt, æquantur ſummæ Ordinatarum ex Abſciſſa ad curvam in eaſdem partes extenſarum. Q. E. D.

Re-

Recta quæ ita secat ordinatas appelletur Curvæ *Diameter*.

Coroll. 1. Duc rectas duas parallelas secantes Lineam secundi ordinis in duobus punctis, recta quæ has bisecat, bisecabit omnes illis parallelas. Adeoque æquatio $yy = ax^2 + bx + c$ designat omnes Lineas secundi ordinis.

Coroll. 2 Duc rectas duas quasvis parallelas, secantes Lineam tertii ordinis in tribus punctis; recta quæ ita secat has parallelas, ut summa duarum partium ex uno ejus latere consistentium, & ad curvam terminatarum, æquetur parti tertiæ ex altero ejus latere consistenti, & ad curvam terminatæ, ita etiam secabit omnes rectas hisce parallelas.

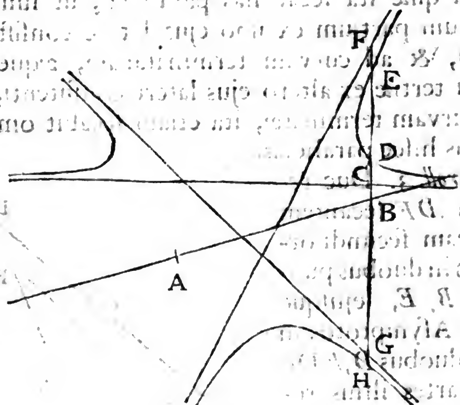


Coroll. 3. Duc rectam *DF* secantem Lineam secundi ordinis in duobus punctis *B*, *E*, ejusque duas Asymptotos in aliis duobus *D*,*F*, Dico partes illius rectæ interceptas inter Asymptotos & earum crura sibi invicem æquari. Duc Diametrum *CA* bisecantem *BE* omnesque rectas illi parallelas. Quia curva coincidit cum Asymptotis ad distantiam infini-

K tam,

tam, coeunt in illo casu puncta *B*, *D*; *E*, *F*: adeoque Diameter bisecat ordinatas in Asymptotis terminatas in distantiâ infinitâ: unde per naturam rectæ in omni distantiâ eas bisecabit, hoc est, ubique *AD* = *AF*, sed *AB* = *AE*, ergo *BD* = *EF*. Q. E. D.

Coroll. 4. Duc rectam *FH* secantem Lineam tertii ordinis in tribus punctis *E*, *D*, *H*; ut & tres ejus Asymptotos in tribus aliis *F*, *C*, *G*;



Dico *FE*, *GH* partes duas hujus rectæ inter Asymptotos & crura interceptas & ab Asymptotis ad curvam in easdem plagas extensas æquari parti tertiæ *CD* inter Asymtoton tertiam & ejus crus interceptæ, & ab Asymptoto ad curvam in oppositas plagas extensæ. Ducatur enim Diameter *AB* quæ ita secat ordinatas, ut sit

sit $BD + BE = BH$; quoniam in distantiâ infinitâ Asymptoti coincidunt cum suis cruribus, coeuntibus punctis F, E; C, D; G, H; Diameter AB ita etiam secabit ordinatas in Asymptotis terminatas in distantiâ infinitâ ut sit $BC + BF = BG$: at si hoc accidat in quâlibet distantiâ, accidet in omni, ergo est universaliter $BC + BF = BG$, sed $BD + BE = BH$; ergo demendo æqualia ab æqualibus, erit $BD - BC + BE - BF = BH - BG$, hoc est, $CD - EF = GH$, vel $CD = EF + GH$. Q. E. D.

Eâdem facilitate simile demonstratur de curvis superiorum ordinum.

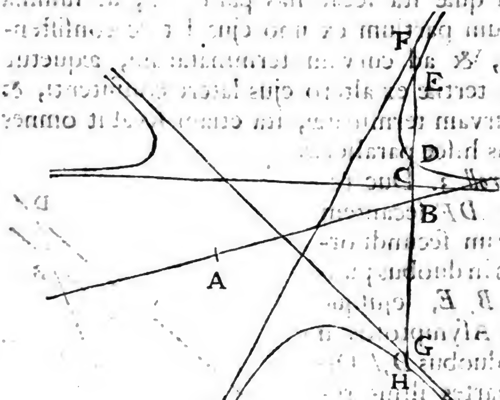
Scholion.

HAnc Propositionem demonstravi considerando coefficientem termini secundi esse summam omnium radicum sub signis propriis collectam. Coefficiens tertii termini est factum sub singulis duabus radicibus, coefficiens quarti sub singulis tribus, quinti sub singulis quatuor, & sic in infinitum. Unde facillime sequitur series Theorematum sequentium ad libitum continuanda.

1. Ducantur quinque parallelæ secantes Lineam tertii vel superioris ordinis in tot punctis quot curva habet dimensiones: Sectio Conica vel linea recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa rectangulorum sub partibus earum inter curvam sectionem Conicam vel rectam interceptis, & à curvâ ad sectionem Coni vel rectam in

tam, coeunt in illo caſu puncta *B*, *D*; *E*, *F*: adeoque Diameter biſecat ordinatas in Aſymptotis terminatas in diſtantiâ infinitâ: unde per naturam rectæ in omni diſtantiâ eas biſecabit, hoc eſt, ubique *AD* = *AF*, ſed *AB* = *AE*, ergo *BD* = *EF*. Q. E. D.

Coroll. 4. Duc rectam *FH* ſecantem Lineam tertii ordinis in tribus punctis *E*, *D*, *H*; ut & tres ejus Aſymptotos in tribus aliis *F*, *C*, *G*;



Dico *FE*, *GH* partes duas hujus rectæ inter Aſymptotos & crura interceptas & ab Aſymptotis ad curvam in eaſdem plagas extenſas æquari parti tertiæ *CD* inter Aſymtoton tertiam & ejus crus interceptæ, & ab Aſymptoto ad curvam in oppoſitas plagas extenſæ. Ducatur enim Diameter *AB* quæ ita ſecat ordinatas, ut ſit

ſit $BD+BE=BH$; quoniam in diſtantiâ infinitâ Aſymptoti coincidunt cum ſuis cruribus, coeuntibus punctis *F*, *E*; *C*, *D*; *G*, *H*; Diameter *AB* ita etiam ſecabit ordinatas in Aſymptotis terminatas in diſtantiâ infinitâ ut ſit $BC+BF=BG$: at ſi hoc accidat in quâlibet diſtantiâ, accidet in omni, ergo eſt univerſaliter $BC+BF=BG$, ſed $BD+BE=BH$; ergo demendo æqualia ab æqualibus, erit $BD-BC+BE-BF=BH-BG$, hoc eſt, $CD-EF=GH$, vel $CD=EF+GH$. Q. E. D.

Eâdem facilitate ſimile demonſtratur de curvis ſuperiorum ordinum.

Scholion.

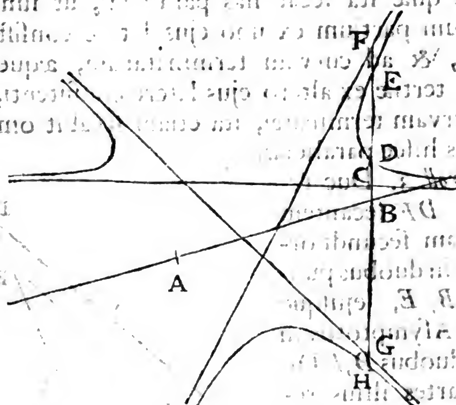
HAnc Propoſitionem demonſtravi conſiderando coefficientem termini ſecundi eſſe ſummam omnium radicum ſub ſignis propriis collectam. Coefficiens tertii termini eſt factum ſub ſingulis duabus radicibus, coefficiens quarti ſub ſingulis tribus, quinti ſub ſingulis quatuor, & ſic in infinitum. Unde facillime ſequitur ſeries Theorematum ſequentium ad libitum continuanda.

1. Ducantur quinque parallelæ ſecantes Lineam tertii vel ſuperioris ordinis in tot punctis quot curva habet dimenſiones: Sectio Conica vel linea recta, quæ ita ſecat has parallelas, ut ſumma rectangulorum ſub partibus earum inter curva[illegible]m Conicam vel rectam interce-[illegible] [illegible]d ſectionem Coni vel rectam

 in

tam, coeunt in illo casu puncta *B*, *D*; *E*, *F*: adeoque Diameter bisecat ordinatas in Asymptotis terminatas in distantiâ infinitâ: unde per naturam rectæ in omni distantiâ eas bisecabit, hoc est, ubique *AD* = *AF*, sed *AB* = *AE*, ergo *BD* = *EF*. Q. E. D.

Coroll. 4. Duc rectam *FH* secantem Lineam tertii ordinis in tribus punctis *E*, *D*, *H*; ut & tres ejus Asymptotos in tribus aliis *F*, *C*, *G*;



Dico *FE*, *GH* partes duas hujus rectæ inter Asymptotos & crura interceptas & ab Asymptotis ad curvam in easdem plagas extensas æquari parti tertiæ *CD* inter Asymtoton tertiam & ejus crus interceptæ, & ab Asymptoto ad curvam in oppositas plagas extensæ. Ducatur enim Diameter *AB* quæ ita secat ordinatas, ut

fit

ſit $BD+BE=BH$; quoniam in diſtantiâ infinitâ Aſymptoti coincidunt cum ſuis cruribus, coeuntibus punctis F, E; C, D; G, H; Diameter AB ita etiam ſecabit ordinatas in Aſymptotis terminatas in diſtantiâ infinitâ ut ſit $BC+BF=BG$: at ſi hoc accidat in quâlibet diſtantiâ, accidet in omni, ergo eſt univerſaliter $BC+BF=BG$, ſed $BD+BE=BH$; ergo demendo æqualia ab æqualibus, erit $BD-BC+BE-BF=BH-BG$, hoc eſt, $CD-EF=GH$, vel $CD=EF+GH$. Q. E. D.

Eâdem facilitate ſimile demonſtratur de curvis ſuperiorum ordinum.

Scholion.

HAnc Propoſitionem demonſtravi conſiderando coefficientem termini ſecundi eſſe ſummam omnium radicum ſub ſignis propriis collectam. Coefficiens tertii termini eſt factum ſub ſingulis duabus radicibus, coefficiens quarti ſub ſingulis tribus, quinti ſub ſingulis quatuor, & ſic in infinitum. Unde faciliime ſequitur ſeries Theorematum ſequentium ad libitum continuanda.

1. Ducantur quinque parallelæ ſecantes Lineam tertii vel ſuperioris ordinis in tot punctis quot curva habet dimenſiones: Sectio Conica vel linea recta, quæ ita ſecat has parallelas, ut ſumma rectangulorum ſub partibus earum inter curva ſectionem Conicam vel rectam interceptis, & à curvâ ad ſectionem Coni vel rectam

in easdem plagas extensis, æquetur summæ rectangulorum sub partibus earundem parallelarum ad alteras sectionis Coni vel rectæ plagas à curvâ extensis, & in curva terminatis, ita secabit omnes rectas hisce parallelas.

2. Ducantur novem parallelæ secantes curvam quarti vel superioris ordinis in tot punctis quot curva est dimensionum. Ducatur Linea tertii vel inferioris ordinis secans has novem parallelas: & si componantur Parallepipeda sub singulis tribus partibus harum parallelarum inter curvam & Lineam tertii vel ordinis inferioris interceptis: atque in unaquâque novem parallelarum, si Parallelepipeda quæ prodeunt affirmata, æqualia deprehendantur iis quæ prodeunt negativa; idem accidet in omnibus rectis prioribus novem parallelis. Et sic porro.

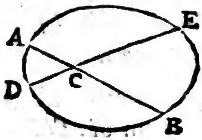
Hæ Lineæ quæ ita secant parallelas, tanquam curvarum Diametri (ut ita dicam) quodammodo considerari possunt.

PROP. XI. THEOR.

Sit AEBD *Linea secundi ordinis, quam secet recta* AB *in duobus punctis* A, B; *ut & recta* DE *in duobus aliis* D, E; *harum concursus sit* C. *Dico esse* AC×CB *ad* DC×CE *in ratione datâ; modo detur rectarum* AB, DE *inclinatio ad se invicem.*

SUpponamus enim Abscissam $AC = x$, & rectarum DC, CE quamlibet ambigue designare ordinatam y: atque curva hujusmodi æquatione

tione $y^2 + \overline{ax + b} \times y + cx^2 - dx = 0$ designabitur, in quâ quantitas determinata non repetietur, quoniam principium Abscissæ est in curva. Ut inveniatur AB sit $y = 0$, & evanescent termini in quibus ea reperitur, atque erit $cx^2 - dx = 0$, unde in illo casu est $x = \frac{d}{c} = AB$, ergo $AB - AC = \frac{d}{c} - x = BC$:



cujus signum mutetur quoniam puncta A, B jacent ad partes puncti C contrarias, & erit $BC = x - \frac{d}{c}$. Et inde $AC \times BC = xx - \frac{dx}{c}$. Constat vero per naturam æquationum, terminum ultimum in quo radix non reperitur, esse factum sub omnibus radicibus; hoc est $DC \times CE = cx^2 - dx$, & hoc rectangulum est ad $AC \times CB = xx - \frac{dx}{c}$ ut c ad unitatem: at servatâ rectarum AB, DE inclinatione ad invicem, non mutabitur quantitas c, ergo neque dicta ratio facti $AC \times CB$ ad $DC \times CE$. Q. E. D.

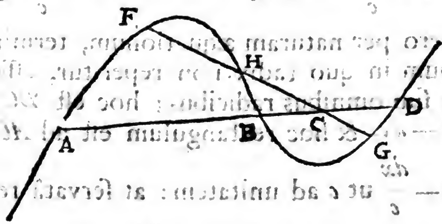
Ex hac propositione tanquam totidem Corollaria fluunt omnia, quæ tradere solent authores de sectionum Conicarum Diametris, Verticibus, Lateribus rectis & tranversis, & ratione contentorum sub parallelarum segmentis.

PRO-

PROP. XII.

Sit AFG *Linea tertii ordinis, quam secet recta* AD *in tribus punctis* A, B, D, *ut &* FG *in tribus aliis* F, G, H: *harum concursus sit* C. *Dico esse* AC×BC×DC *ad* FC×GC×HC *in ratione datâ; modo detur rectarum* AD, FG *ad se invicem inclinatio.*

POnamus esse Abscissam $AC = x$, & rectarum CF, CH, CG quamlibet ambigue designare ordinatam y: & curva hujusmodi æquatione designabitur $y^3 + \overline{ax+b} \times y^2 + \overline{cx^2+dx+e} \times y = fx^3 - gx^2 + hx$, ubi quantitas data non reperietur propterea quod initium Abscissæ est in curvâ. Sit $y = 0$, atque erit $fx^3 - gx^2 + hx = 0$, unde in



illo casu est $x = \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}}$, hoc est $AB = \frac{g}{2f} - \sqrt{\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}}$, & $AD = \frac{g}{2f} + \sqrt{\frac{g^2}{4ff} - \frac{h}{f}}$, ergo $BC = x - \frac{g}{2f} + \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}$, & $CD = x - \frac{g}{2f}$

$-\sqrt{}$

$-\sqrt{\frac{gg}{4ff}-\frac{h}{f}}$ cum signo mutato. Unde est $AC \times BC \times DC = x^3 - \frac{gx^2}{f} + \frac{hx}{f}$. Sed per naturam æquationum est $FC \times HC \times GC = fx^3 - gx^2 + hx$; ideoque solidum prius est ad posterius ut unitas ad f: at servatâ inclinatione rectarum AD, FG, dabitur quantitas f, ergo etiam dicta ratio solidi $AC \times BC \times CD$ ad $FG \times GC \times HC$. Q. E. D.

Hinc tam facile consequuntur ea quæ tradidit D. *Neutonus* de Linearum tertii Ordinis Diametris, Verticibus, Lateribus rectis & transversis, ratione contentarum sub parallelarum segmentis, atque alia plurima; ut eadem plenius ostendere necessarium haud duxerim.

Sufficiat hic obiter annotare, quod hâc methodo universali procedendo, scilicet argumentando à naturis æquationum, patescunt non solum sectionum Coni proprietates, quas tanto labore adinvenerunt veteres, & tot ambagibus demonstratas dederunt, idque methodo quæ ad alias curvas extendi nequit; sed & proprietates curvarum omnium ordinum superiorum.

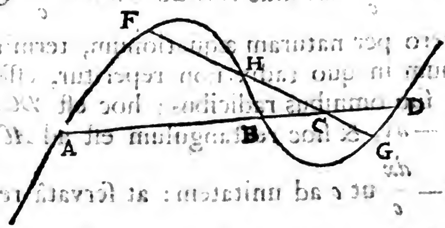
Hisce præmissis, pergerem ad Enumerationem Linearum tertii ordinis; sed ob rei analogiam enumerare licet eas secundi. Hæ (per *Coroll.* 1. *Prop*, 10.) reducuntur omnes ad æquationem $yy = ax^2 + bx + c$; quæ æquatio, ut statim apparebit, designat Hyperbolam, Ellipsin aut Parabolam, prout terminus axx affirmativus est, negativus, vel nullus.

Enu-

PROP. XII.

Sit AFG *Linea tertii ordinis, quam secet recta* AD *in tribus punctis* A, B, D, *ut &* FG *in tribus aliis* F, G, H: *harum concursus sit* C. *Dico esse* AC×BC×DC *ad* FC×GC×HC *in ratione datâ; modo detur rectarum* AD, FG *ad se invicem inclinatio.*

POnamus esse Abscissam $AC = x$, & rectarum CF, CH, CG quamlibet ambigue designare ordinatam y: & curva hujusmodi æquatione designabitur $y^3 + \overline{ax+b} \times y^2 + \overline{cx^2+dx+e} \times y = fx^3 - gx^2 + hx$, ubi quantitas data non reperietur propterea quod initium Abscissæ est in curvâ. Sit $y = 0$, atque erit $fx^3 - gx^2 + hx = 0$, unde in



illo casu est $x = \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}}$, hoc est $AB = \frac{g}{2f} - \sqrt{\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}}$, & $AD = \frac{g}{2f} + \sqrt{\frac{g^2}{4ff} - \frac{h}{f}}$, ergo $BC = x - \frac{g}{2f} + \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}$, & $CD = x - \frac{g}{2f}$

$-\sqrt{}$

$-\sqrt{\frac{gg}{4ff}-\frac{h}{f}}$ cum ſigno mutato. Unde eſt $AC \times BC \times DC = x^3 - \frac{gx^2}{f} + \frac{hx}{f}$. Sed per naturam æquationum eſt $FC \times HC \times GC = fx^3 - gx^2 + hx$; ideoque ſolidum prius eſt ad poſterius ut unitas ad f: at ſervatâ inclinatione rectarum *AD*, *FG*, dabitur quantitas f, ergo etiam dicta ratio ſolidi $AC \times BC \times CD$ ad $FG \times GC \times HC$. Q. E. D.

Hinc tam facile conſequntur ea quæ tradidit D. *Neutonus* de Linearum tertii Ordinis Diametris, Verticibus, Lateribus rectis & tranſverſis, ratione contentarum ſub parallelarum ſegmentis, atque alia plurima; ut eadem plenius oſtendere neceſſarium haud duxerim.

Sufficiat hic obiter annotare, quod hâc methodo univerſali procedendo, ſcilicet argumentando à naturis æquationum, pateſcunt non ſolum ſectionum Coni proprietates, quas tanto labore adinvenerunt veteres, & tot ambagibus demonſtratas dederunt, idque methodo quæ ad alias curvas extendi nequit; ſed & proprietates curvarum omnium ordinum ſuperiorum.

Hiſce præmiſſis, pergerem ad Enumerationem Linearum tertii ordinis; ſed ob rei analogiam enumerare licet eas ſecundi. Hæ (per *Coroll.* 1. *Prop.* 10.) reducuntur omnes ad æquationem $yy = ax^2 + bx + c$; quæ æquatio, ut ſtatim apparebit, deſignat Hyperbolam, Ellipſin aut Parabolam, prout terminus axx affirmativus eſt, negativus, vel nullus.

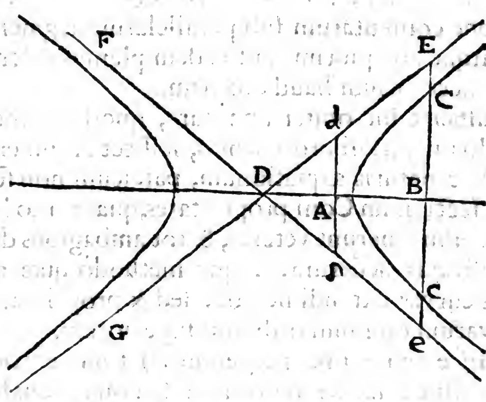
Enu-

Enumeratio Linearum secundi Ordinis.

PROP. XIII. THEOR.

Æquatio $yy = ax^2 + bx + c$ *designat figuram habentem quatuor crura infinita ad duas Asymptotos rectas jacentia.*

Liquet fere hæc Propositio ex *Exemplo primo Scholii Prop.* 8. sed argumento magis distincto sic evincitur.



Augeatur x in infinitum, & duo valores ordinatæ y hinc inde æquales etiam augebuntur in infinitum; quare figura habet duo crura infinita. Mutetur signum ipsius x, hoc est sumatur Abscissa ad alteras partes, & æquatio erit hæc $y^2 = ax^2 - bx + c$, ubi patet quod augendo x in

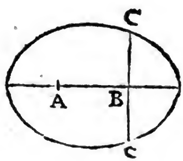
in infinitum, etiam augebitur y in infinitum: nam terminus affirmativus ax^2 erit omnibus reliquis multo major, modo x ſit admodum magna: quare curva habet alia duo crura, & omnino quatuor.

Reducatur y in ſeriem hujuſmodi convergentem $y = \pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{4ac - bb}{8ax\sqrt{a}}$ &c. Unde (per *Prop.* 6.) Ordinata Aſymptoti erit $\pm x\sqrt{a}$ $\pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$. Igitur pro Aſymptotis habet hæc curva duas rectas ex Abſciſsâ hinc inde æqualiter jacentes. Nam ſume $AD = \frac{-b}{2a}$, in Abſciſsâ; per initium Abſciſſæ duc $dA\delta$ ordinatæ parallelam, in quâ ſint Ad, $A\delta$, æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, ad contrarias puncti A partes ſumptæ; junge Dd, $D\delta$, erunt illæ duæ Aſymptoti. Ideoque Figura habet quatuor crura Hyperbolica ad duas rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si bb majus ſit $4ac$, crura jacent in angulis EDe, FDG; ſin minus jacent in angulis hiſce deinceps: ut conſtat ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 2. Hæc Figura (per *Coroll.* 1. *Prop.* 4.) ejus Aſymptotos non decuſſat, adeoque (per *Coroll.* 2. *Prop.* 1.) crura quæ in eodem angulo jacent, ductu continuo ſemper conjunguntur.

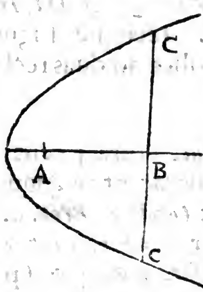
Coroll. 3. Unde hæc Figura ſemper conſtat ex Hyperbolis duabus Inſcriptis, in Aſymptoton angulis oppoſitis, jacentibus; & proinde unicam tantum ſpeciem conſtituit. Quæ eſt ſpecies prima Linearum ſecundi ordinis.



Coroll. 4. Si terminus ax^2 ſit negativus, curva nequit excurrere in infinitum: ergo (per *Prop.* 1.) in ſe redit; & conſtat ex Ovali unicâ. Quæ eſt ſpecies ſecunda. Hoc *Corollarium* facillime colligitur ex *primo Exemplo Scholii Propoſitionis octavæ.*

PROP. XIV. THEOR.

Si deſit terminus ax^2, *æquatio* $y^2 = * bx + c$ *deſignat figuram habentem duo tantum crura infinita Parabolica in eandem plagam extenſa.*



PAtet enim quod augendo Abſciſſam x in infinitum, ſimul augebuntur ordinatæ y valores, ergo curva habet duo crura infinita, & in eandem plagam protenſa; quoniam exiſtente x infinite magna, ordinata y eſt eâ infinite minor. Quod ſi mutetur ſignum ipſius x, æquatio evadet $y^2 = -bx + c$; poſtquam ergo eouſque augetur x, ut ſit $bx = c$; cur-

curva ad illas partes ulterius pergere nequit, quia erit quadratum ordinatæ negativa quantitas, & inde ordinata ipsa impossibilis. Igitur curva habet duo tantum crura. Per methodum serierum est $y = \pm \sqrt{bx} \pm \frac{c}{2\sqrt{bx}} + \&c.$ Unde (per *Prop.* 6.) $\sqrt{bx}$ est Ordinata Asymptoti ad Abscissam x pertinens, quumque hæc non sit ordinata rectæ, crura sunt Parabolica. Q. E. D.

Coroll. Crura hujus curvæ sunt sui generis simplicissima. Hæc figura constituit Linearum secundi ordinis speciem tertiam; Et patet eas esse tres Coni sectiones.

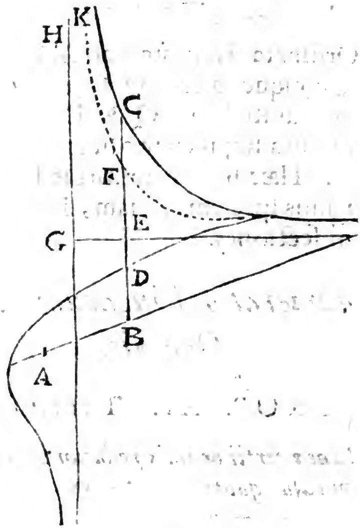
Enumeratio Linearum tertii Ordinis.

PROP. XV. THEOR.

Omnes Lineæ tertii ordinis reducuntur ad hos æquationum casus quatuor, $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

ÆQuatio $\overline{z + a} \times v^2 = \overline{bz^2 + cz + d} \times v + ez^3 + fz^2 + gz + h$ (per *Coroll.* 1. *Prop.* 5.) comprehendit omnes Lineas *secundi* ordinis: unde, si probavero illam æquationem semper reduci posse ad unam quatuor dictarum formarum, constabit Propositio.

Cas. 1. Si æquationis terminus nullus desit, divide eam per $z + a$ coefficientem ipsius v^2, & erit v^2 $= \frac{\overline{bz^2 + cz + d} \times v + ez^3 + fz^2 + gz + h}{z + a}$, atque ex-



trahendo radicem $v = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a} \pm p$, ubi p est latus quadratum partis valorum ipsius v vinculo quadratico inclusæ. Sit $AB = z$, BDC ordinata secans curvam in duobus punctis, adeoque rectarum BD, BC quamlibet ambigue representat ordinata v: Id est $BC = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a} + p$,

BD

$BD = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a} - p$. Harum differentia $CD = 2p$. Biseca CD in F, ut sit $DF = p$, huic adde BD, & erit $BF = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a}$, quæ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas ad curvam terminatas: quæque in casu præsenti est Hyperbola Conica. Sit ea KF, ejusque Asymptoti GE, GH; quarum hæc parallela est ordinatæ DC, propterea quod ordinata EF secat Hyperbolam in unico puncto F. Sume Abscissam novam $GE = x$, ordinatam novam EC vel $ED = y$; eritque $EC = CF + FE$, $ED = CF - FE$, vel more Algebraico $y = EF \pm EC$. Unde in æquatione ad curvam $2EF$ erit coefficiens ipsius y, ut constat ex natura æquationis Quadraticæ. Jam sit e data quantitas, & ex naturâ Hyperbolæ erit $EF = \frac{e}{2x}$; ergo $\frac{e}{x}$ erit coefficiens ipsius y in æquatione curvam definiente: atque exinde æquatio necessario induet hanc formam $yy - \frac{ey}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$ vel $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Cas. 2. Quod si desit terminus zv^2, æquatio erit hujusmodi $av^2 = \overline{bz^2 + cz + d} \times v + ez^3 + fz^2 + gz + :$ & erit $BF = \frac{bz^2 + cz + d}{2a}$, quæ est ordinata Parabolæ

rabolæ Conicæ biſecantis ordinatas. Si quando hoc accidat, mutetur Abſciſſa z in Ordinatam v, & æquatio erit $v^3+\overline{az+b}\times v^2+\overline{cz+d}\times v=ez^2+fz+f$; tolle terminum v^3 (per *Coroll.* 4. *Prop.* 5.) & æquatio erit $\overline{az+b}\times v^2+\overline{cz+d}\times v=ez^2+fz+g$: quæ (per *Caſ.* 1.) convertitur in hanc $xy^2-ey=bx^2+cx+d$, & hæc forma continetur inpriori $xy^2-ey=ax^3+bx^2+cx+d$. Q.E.D.

Caſ. 3. Si deſint termini av^2, dv, erit $BF=\frac{bz^2+cz}{cz}=\frac{bz+c}{2}$, quæ eſt ordinata rectæ biſecantis ordinatas. In illo caſu ſume abſciſſam x in rectâ illâ biſecante à debito initio computatam, & ordinatam y priori v parallelam; & æquatio induet hanc formam $xyy=ax^3+bx^2+cx+d$, quæ continetur in priori. Q. E. D.

Caſ. 4. Si deſint termini zv^2, av^2, reſtabit $\overline{bz^2+cz+d}\times v=ez^3+fz^2gz+h$, quo in caſu ordinata occurrit curvæ in unico tantum puncto. Tolle terminum ez^3 (per *Coroll.* 4. *Prop.* 5.) & æquatio erit $\overline{bz^2+cz+d}\times v=fz^2+gz+h$: hæc æquatio mutando abſciſſam z in ordinatam v, convertetur (per *Caſ.* 1.) in hanc $xy^2-ey=cx+d$, quæ continentur in formâ $xy^2-ey=ax^3+bx^2+cx+d$ Q. E. D.

Caſ. 5. Si deſint termini zv^2, av^2, bz^2v, manebit $czv+dv=ez^3+fz^2+gz+h$, ubi ſi pro v ſribas y, & $x-\frac{d}{c}$ pro z, orietur $xy=ax^3+bx^2+cx+d$. Q. E. D.

Caſ.

Cas. 6. Si desint termini zv^2, bz^2v, erit $BF = \frac{cz+d}{2a}$, quæ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas CD; in illo casu sume Abscissam x in rectâ illâ bisecante, & ordinatam v priori parallelam, & prodibit $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Cas. 7. Si desint termini zv^2, av^2, bz^2v, czv, restabit $dv = ez^3 + fz^2 + gz + h$, quæ est hujus formæ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Reducuntur ergo omnes Lineæ tertii ordinis ad quatuor sequentes æquationum casus,

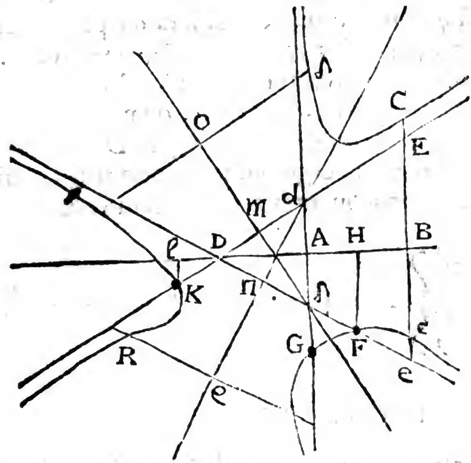
$$\left.\begin{array}{r} xy^2 - ey \\ xy \\ yy \\ y \end{array}\right\} = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ ut opportebat.}$$

PROP. XVI. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *designat figuram habentem sex crura Hyperbolica ad tres Assymptotos jacentia.*

SIT $AB = x$, $BC = y$. Invenies $y = \frac{e}{2x} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e^2}{4x^2}}$; reducatur (per Theor. *Neutoni*) pars irrationalis in seriem $\pm \frac{e}{2x} \pm \frac{d}{e}$ &c. eo citius convergentem, quo minor est x; at-

atque provenient ordinatæ valores $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. $-\frac{d}{e}$ &c. Valor hic ultimus indicat curvam se-



care ordinatam primam, puta in *G*. Valor autem ille $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. indicat (per *Coroll.*2. *Prop.*7.) ordinatam primam esse Asymptoton, & habere duo crura ad diversas ejus partes posita, & in plagas oppositas tendentia. Evadat jam x utcunque magna & augebuntur simul ordinatæ valores sine limite, quare curva habet alia duo crura infinita. Mutetur signum ipsius x, & æquatio evadet $-xy^2 - ey = -ax^3 + bx^2 - cx + d$, vel $xy^2 + ey = ax^3 - bx^2 + cx - d$, ubi patet quod etiam-

etiamnum augeri poteſt x in infinitum & ſimul augebuntur ordinatæ valores, nunquam enim evadent impoſſibiles quum abſciſſa eſt ſatis magna? Unde Figura habet alia duo crura & omnino ſex.

Reducatur jam y in ſeriem eo citius convergentem quo major eſt x, atque invenietur

$$BC = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - bb + 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}} + \&c. \quad Bc$$

$$= x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - bb - 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}} \&c.$$ Habet igitur (per *Prop.* 6.) figura duas Aſymptotos rectas ab Abſciſsâ hinc inde æqualiter jacentes: nam ſit $AD = \frac{b}{2a}$, & Ad, $A\delta$ hinc inde æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, junge Dd, $D\delta$ erunt illæ duæ Aſymptoti. Ergo Figura habet ſex crura ad tres Aſymptotos rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si deſit terminus bxx, tres Aſymptoti, evaneſcente triangulo $Dd\delta$, in uno eodemque puncto conveniunt.

Coroll. 2. Si figura Ovalem conjugatam habeat, ea ſemper continetur intra triangulum $Dd\delta$; nam ſi conſiſteret extra, duci poterat recta ſecans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Idem intellige de Nodo, Cuſpide & puncto conjugato. Ut enim Punctum eſt Ovalis infinite parva, ſic Cuſpis eſt Nodus infinite parvus.

Coroll. 3. Ergo ſi deſit terminus bx^2, hoc eſt, ſi tres Aſymptoti in uno eodemque puncto conveniunt, Figura nunquam habet Ovalem, Nodum Cuſpidem aut Punctum conjugatum: quia (per *Coroll.* 1, 2.) evaneſcit triangulum intra quod ſemper conſiſtit Ovalis, Nodus, Cuſpis vel punctum conjugatum.

Coroll. 4. Duc δMO biſecantem Dd, in M, item OP Aſymptoto Dd parallelam ſecantem curvam in P. Sitque Abſciſſa $MO = z$, Ordinata $OP = v$; & eâdem ratione, quà exiſtente $AB = x$, $BC = y$, prodit $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, prodibit etiam $zv^2 - Ev = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Et ſi ducatur dNQ biſecans $D\delta$ in N, & QR Aſymptoto $D\delta$ parallela, curvam ſecans in R, & ſit $NQ = s$, $RQ = t$, orietur $st^2 - et = \alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + \delta$. Qui de hiſce dubitat utatur calculo.

Coroll. 5. Unde ſi æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deſit terminus bx^2, in æquationibus duabus reliquis deerunt termini reſpectivi Bz^2, $\beta\varrho^2$. Et contra, ut conſtat ex *Coroll.* 1.

Coroll. 6. Si deſit terminus ey, Abſciſſa eſt Diameter biſecans Ordinatas: Et contra, ſi AB ſit Diameter, deeſt terminus ey. Simile intellige de Abſciſſis MO, NQ earumque Ordinatis.

Coroll. 7. Si deſit terminis ey, Curva non decuſſat Aſymptoton $d\delta$; nam exiſtente x infinite parva erit $y = \pm\sqrt{\frac{d}{x}}$, adeoque (per *Coroll.* 3. *Prop.* 7.) crura jacent ad eaſdem Aſymptoti $d\delta$ partes & in plagas oppoſitas feruntur: & inde (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) tria interſectionis puncta

abeunt

abeunt in infinitum; adeoque nullum reſtabit punctum in quo curva decuſſare poteſt ejus Aſymptoton. Et contra, ſi curva non decuſſet Aſymptoton, deeſt terminus ey & Abſciſſa AB eſt Diameter, atque crura jacent ad eaſdem Aſymptoti $d\delta$ partes, in plagas oppoſitas lata. Simile intellige de Aſymptotis duabus reliquis cum Abſciſſis δO, dQ.

Coroll. 8. Si ſit $bb - 4ac = 4ae\sqrt{a}$, curva non decuſſat Aſymptoton Dd, adeoque (per *Coroll.* 7.) MO eſt Diameter. Nam eſt $AB = x$, $BC = y$, $BE = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$; quod ſi curva ſecaret Aſymptoton Dd, erit in illo caſu $BE = BC$, id eſt $y = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$. In æquatione pro y ſubſtitue hunc valorem, & invenies $x = \frac{4ad + 2be\sqrt{a}}{bb - 4ac - 4ae\sqrt{a}}$ $= AL$, ubi LK eſt Ordinata tranſiens per K punctum interſectionis. Jam ſit $bb - 4ac - 4ae\sqrt{a}$ $= 0$, vel $bb - 4ac = 4ae\sqrt{a}$, & erit AL infinite magna, adeoque punctum interſectionis nullibi erit. Similiter ſi F ſit punctum in quo curva ſecat Aſymptoton $D\delta$, & FH ordinata; erit $AH = \frac{4ad - 2bc\sqrt{a}}{bb - 4ac + 4ae\sqrt{a}}$, unde ſi ſit $bb - 4ac =$ $- 4ae\sqrt{a}$, Curva non decuſſat Aſymptoton $D\delta$, & eſt NQ Diameter.

Coroll. 9. Ergo ſi neque terminus ey deſit, neque ſit $bb - 4ac = \pm 4ae\sqrt{a}$, curva nullam habe-

bit Diametrum, sin eorum alterutrum accidit, curva unicam habebit Diametrum & tres, si utrumque. Sciendum enim est Ordinatas bisectas esse alicui Asymptoto parallelas, ut constat per conversum *Prop.* 5. ejusque *Scholion*; & Diametrum semper bisecare Ordinatas in Asymptotis terminatas, quia curva concidit cum Asymptotis ad distantiam infinitam: adeoque Diametrum transire per intersectionem duarum Asymptoton necesse est.

Coroll. 10. Igitur hæc curva vel habet nullam, unam vel tres Diametros: duas enim solas habere nequit.

Coroll. 11. Curva quæ nullam habet Diametrum, secat tres ejus Asymptotos, singulam in unico puncto.

Coroll. 12. Curva quæ unicam habet Diametrum decussat duas Asymptotos, per quarum intersectionem transit illa Diameter: at tertiam non secat.

Coroll. 13. Curva quæ tres habet Diametros Asymptoton nullam omnino secabit.

Coroll. 14. Si $bb - 4ac - 4ae\sqrt{a}$ sit quantitas affirmativa, Asymptotos *DE* jacet inter curvam & Abscissam; sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton & Abscissam. Et si $bb - 4ac + 4ae\sqrt{a}$ sit affirmativa quantitas, Asymptotos *De* jacet inter curvam & Abscissam, sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton & Abscissam.

Coroll. 15. Si desit terminus *ey*, id est, si *AB* sit Diameter, & sit $bb - 4ac$ quantitas affirmativa, curva continet Asymptotos *Dd*, *Dδ* in suo sinu.

ſinu. At ſi quantitas illa ſit negativa, Aſymptoti jacent extra crura adjacentia.

Coroll. 16. Si figura habet tres Diametros, & ſit d quantitas affirmativa, crura jacent extra Aſymptotos; ſin minus intra. Corollaria hæc tria ultima conſtant ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 17. Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ terminus ax^3 ſit negativus, figura habebit duo tantum crura Hyperbolica ad ordinatam primam jacentia. Nam ſeries $\pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$ + &c. ex cujus poſſibilitate pendent reliqua quatuor crura cum earum Aſymptotis erit impoſſibilis. Conſtat etiam hoc *Corollarium* ex *Exemplo tertio Scholii Prop.* 7.

Notandum eſt in hâc Propoſitione ejuſque Corollariis per Diametrum ſemper intelligi Diametrum quæ biſecat Ordinatas duarum dimenſionum.

Poſtquam compertus eſt numerus crurum alicujus curvæ, ejus ſpecies enumerantur determinando quæ crura ductu continuo conjunguntur; ut & deſcribendo Ovales, Nodos, Cuſpides & Puncta conjugata ſiquæ ſint. Hæc omnia ex Propoſitionibus præcedentibus facillime perficiuntur.

Enumeratio Specierum curvæ quam deſignat æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Hyperbolæ novem ſequuntur, ſex cruribus, ad tres rectas triangulum capientes, jacentibus præditi; quæ Diametro ad Ordinatas duarum di-

dimensionum destituuntur. *Vide figuras in Enumeratione* Neutonianâ *Linearum tertii ordinis.*

Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, extrahatur radix y, invenietur $y = \frac{e}{2x} \pm \frac{\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee}}{x}$, patet ergo ordinatam possibilem esse, quando quantitas $ax^4 + bx^3$ $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ vinculo quadratico inclusa est affirmativa, & impossibilem quando negativa: vices autem possibilitatis & impossibilitatis innotescunt per *Exemp.* 3. *Prop.* 8. describendo Parabolam cujus abscissa est x & ordinata $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$.

Species I. *Fig.* 1, 2.

Si æquationis $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ radices omnes AP, $A\varpi$, $A\pi$, Ap sint reales ejusdem signi & inæquales, Figura constat ex tribus Hyperbolis Inscriptâ, Circumscriptâ & Ambigenâ. Nam (per *Exemp.* 3. *Prop.* 8.) ordinata inter puncta P, ϖ vel π, p erecta est imaginaria, & realis erit ordinata alio quovis abscissæ puncto insistens. Erige ordinatas PT, $\varpi\tau$, $\pi\daleth$, pt, & hæ tangent curvam in totidem punctis T, τ, $\daleth$, t: etenim in illo casu ordinatarum vel summa vel differentia evanescit, prout ad diversas vel easdem Abscissæ partes extenduntur. Unde puncta T, τ, $\daleth$, t, sunt limites possibilitatis & impossibilitatis, atque adeo intra medios limites τ, $\daleth$ continetur Ovalis. Crura vero quæ jacent ad angulum D conjunguntur: quoniam ordi-

ordinata inter p, π erecta non occurit curvæ. Sed & crura quæ jacent ad angulos d, δ etiam conjunguntur; aliter enim, si fieri potest, conjungantur, & duci poterit recta per Ovalem secans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Ex supradictis abunde patet quod crura semper jacent ad diversas Asymptoti partes; & quod Hyperbola Conica bisecat ordinatas duarum dimensionum; ex quarum consideratione necessario sequitur Hyperbolarum unam esse Inscriptam, alteram Circumscriptam, & tertiam Ambigenam: Quæ est Species prima.

Species II. *Fig.* 3, 4.

Si ex radicibus duæ maximæ Ap, $A\pi$, (*fig.* 3.) vel duæ minimæ AP, $A\varpi$ (*fig.* 4.) sint æquales, Ovalis tangit Hyperbolam Circumscriptam, & tangendo evadit Nodus, atque Hyperbola, Nodata; adeoque Figura constat ex tribus Hyperbolis Inscriptâ, Nodatâ & Ambigenâ: Quæ est Species secunda.

Species III. *Fig.* 5, 6.

Si radices tres maximæ (*fig.* 5.) vel tres minimæ (*fig.* 6.) inter se æquentur, Nodus evadit infinite parvus, id est, Cuspis, & Figura constat ex Hyperbolis tribus Inscriptâ, Cuspidatâ & Ambigenâ. Quæ est Species tertia.

Notandum est crura Hyperbolæ Nodatæ semper esse versus se invicem convexa; aliter enim duci poterat recta secans curvam in quatuor punctis. Idem intellige de Cuspidatâ, si- quidem

quidem Cuſpis nihil aliud eſt quam Nodus infinite parvus.

Species IV. *Fig.* 7.

Si è radicibus duæ mediæ æquentur (*fig.* 7.) Ovalis, quæ in ſpecie primâ obtinebat, evadit infinite parva, id eſt, Punctum. Et Figura conſtat ex Hyperbolis tribus Inſcriptâ, Circumſcriptâ & Ambigenâ cum Puncto conjugato: Quæ eſt Species quarta.

Species V, VI. *Fig.* 7, 8, 9, 10.

Si è radicibus duæ mediæ ſint impoſſibiles, & reliquæ duæ inæquales & ejuſdem ſigni (nam contraria habere nequeunt) impoſſibile erit itidem curvam habere Ovalem, Nodum, Cuſpidem aut Punctum conjugatum; adeoque Figura erit pura conſtans ex Hyperbolis tribus Inſcriptâ, Circumſcriptâ & Ambigenâ. Si hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli *Ddδ*, (*fig.* 7, 8.) Species eſt quinta; ſin jaceant ad latera ejuſdem (*fig.* 9, 10.) Species eſt ſexta.

Species VII, VIII. *Fig.* 11, 12, 13, 14.

Si è radicibus duæ ſint æquales, & alteræ duæ vel impoſſibiles (*fig.* 11, 13.) vel poſſibiles (*fig.* 12, 14.) cum ſignis quæ à ſignis æqualium radicum diverſa ſunt, quatuor crura in uno puncto conveniunt; ſcilicet Hyperbolæ quæ in ſpeciebus quintâ & ſextâ erant circumſcriptæ & ambigenæ nunc conſtituunt Cruciformem. Adeoque Figura conſtat ex Inſcripta & Cruciformi.

formi. Quod si jaceat Inscripta ad angulum trianguli $Dd\delta$ (*fig.* 11, 12.) Species est septima. At si jaceat ad latus (*fig.* 13, 14.) Species est octava.

Species IX. *Fig.* 15, 16.

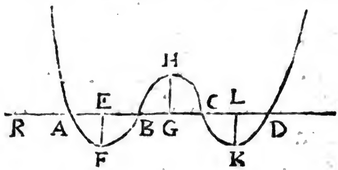
Si radices omnes sint impossibiles (*fig.* 15.) vel si omnes sint reales (*fig.* 16.) & earum duæ negativæ sint & alteræ duæ affirmativæ, Hyperbolæ quæ in speciebus septimâ & octavâ conjungebantur & constituebant Cruciformen ab invicem iterum seperantur; & Figura constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis in angulis Asymptoton oppositis jacentibus, cum Anguinea circa tertiam Asymptoton flexâ: Quæ est Species nona.

Si radices duæ æquentur & duæ reliquæ etiam æquentur, figura migrat in sectionem Conicam cum lineâ rectâ. Nam $\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee}$ erit quantitas rationalis, & inde æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bipartitur in duas æquationes, quarum una designat Hyperbolam Conicam, altera rectam.

Hi sunt casus omnes possibiles radicum æquationis $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ propterea quod $\frac{1}{4}ee$ terminus ultimus est affirmativus, quippe quadratum realis quantitatis. Ut vero hoc melius intelligatur, casus unius impossibilitatem ostendam, cujus ad Exemplum reliquorum impossibilitas facillime evincitur.

Si æquationis $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$, radices tres idem habeant ſignum, dico quartum diverſum habere non poſſe.

Deſcribatur Parabola æquatione $z=ax^4+bx^3$ $cx^2+dx+\frac{1}{4}e^2$ deſignata; quoniam æquationis



$ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ quatuor radices ponuntur reales, Abſciſſa ſecat curvam in quatuor punctis: ea ſunto *A*, *B*, *C*, *D*. Jam ſi fieri poſſit, ſit principium Abſciſſæ inter puncta *A*, *B* adeo ut radix *EA* ſit negativa & reliquæ tres affirmativæ: ſit *EF* Ordinata prima; & exiſtente $x=0$, erit $y=\frac{1}{4}ee=EF$: Sed *EF* eſt quantitas negativa, ergo etiam $\frac{1}{4}ee$ quantitas negativa, quod eſt abſurdum. Similiter oſtendetur quod Principium Abſciſſæ jacere nequit inter puncta *C*, *D*, quoniam ordinatæ ad Abſciſſæ partem *CD* erectæ ſunt omnes negativæ. Igitur conſtat propoſitum; nam ſi tres radices eadem habent ſigna, & quarta diverſum: principium Abſciſſæ vel erit inter puncta *C*, *D* vel *A*, *B*. Sed cum hoc fieri nequit, neque illud fieri poteſt.

Eodemque modo oſtenditur, quod ſi æquationis $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices duæ ſint impoſſibiles, reliquæ duæ idem ſignum habebunt.

Hy-

Hyperbolæ quatuordecem cum ſex cruribus ad tres Aſymptotos triangulum capientes jacentibus, unicam habentes Diametrum ad Ordinatas duarum dimenſionum.

Si deſit terminus *ey* Figura habet Diametrum ad ordinatas duarum dimenſionum, ſcilicet Abſciſſam: & æquatio erit $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Species X, XI. *Fig.* 17.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ radices omnes ſint reales ejuſdem ſigni & inæquales, Figura conſtat ex tribus Hyperbolis ad tres angulos trianguli *Ddδ* jacentibus cum Ovali intra triangulum conſiſtenti. Nam ſint tres radices *Aτ*, *A*ꞁ, *At*, & erunt *T*, ꞁ, *t* limites poſſibilitatis & impoſſibilitatis (*per Exemp.* 2. *Prop.* 8.) atque intra *τ*, *t* continetur Ovalis. Crura vero, quæ ad eoſdem angulos trianguli *Ddδ* jacent conjungi, eodem modo oſtenditur, quo in ſpecie primâ. Si Aſymptoti *Dd*, *Dδ* jaceant intra crura (*fig.* 17.) curva conſtat ex tribus Hyperbolis, duabus Inſcriptis ad *d*, *δ* & circumſcriptâ ad *D*: Quæ eſt Species decima.

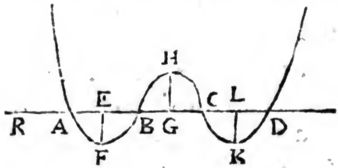
Sin Aſymptotos jaceant extra crura, Figura conſtat ex tribus Hyperbolis, Inſcriptâ ad *D*, & Ambigenis duabus ad *d*, *δ*: Quæ eſt Species undecima.

Species XII. *Fig.* 18.

Si radices duæ maximæ *At*, *A*ꞁ æquentur, Ovalis tangit Hyperbolam Circumſcriptam, & tangendo evadit Nodus, atque Hyperbola Nodata;

Si æquationis $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$, radices tres idem habeant ſignum, dico quartum diverſum habere non poſſe.

Deſcribatur Parabola æquatione $z=ax^4+bx^3$ $cx^2+dx+\frac{1}{4}e^2$ deſignata; quoniam æquationis



$ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ quatuor radices ponuntur reales, Abſciſſa ſecat curvam in quatuor punctis: ea ſunto *A*, *B*, *C*, *D*. Jam ſi fieri poſſit, ſit principium Abſciſſæ inter puncta *A*, *B* adeo ut radix *EA* ſit negativa & reliquæ tres affirmativæ: ſit *EF* Ordinata prima; & exiſtente $x=0$, erit $y=\frac{1}{4}ee=EF$: Sed *EF* eſt quantitas negativa, ergo etiam $\frac{1}{4}ee$ quantitas negativa, quod eſt abſurdum. Similiter oſtendetur quod Principium Abſciſſæ jacere nequit inter puncta *C*, *D*, quoniam ordinatæ ad Abſciſſæ partem *CD* erectæ ſunt omnes negativæ. Igitur conſtat propoſitum; nam ſi tres radices eadem habent ſigna, & quarta diverſum: principium Abſciſſæ vel erit inter puncta *C*, *D* vel *A*, *B*. Sed cum hoc fieri nequit, neque illud fieri poteſt.

Eodemque modo oſtenditur, quod ſi æquationis $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices duæ ſint impoſſibiles, reliquæ duæ idem ſignum habebunt.

Hy-

Hyperbolæ quatuordecem cum ſex cruribus ad tres Aſymptotos triangulum capientes jacentibus, unicam habentes Diametrum ad Ordinatas duarum dimenſionum.

Si deſit terminus *ey* Figura habet Diametrum ad ordinatas duarum dimenſionum, ſcilicet Abſciſſam: & æquatio erit $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Species X, XI. *Fig.* 17.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ radices omnes ſint reales ejuſdem ſigni & inæquales, Figura conſtat ex tribus Hyperbolis ad tres angulos trianguli *Ddδ* jacentibus cum Ovali intra triangulum conſiſtenti. Nam ſint tres radices *Aτ*, *A*ꓶ, *At*, & erunt *T*, ꓶ, *t* limites poſſibilitatis & impoſſibilitatis (*per Exemp.* 2. *Prop.* 8.) atque intra *τ*, *t* continetur Ovalis. Crura vero, quæ ad eoſdem angulos trianguli *Ddδ* jacent conjungi, eodem modo oſtenditur, quo in ſpecie primâ. Si Aſymptoti *Dd*, *Dδ* jaceant intra crura (*fig.* 17.) curva conſtat ex tribus Hyperbolis, duabus Inſcriptis ad *d*, *δ* & circumſcriptâ ad *D*: Quæ eſt Species decima.

Sin Aſymptotos jaceant extra crura, Figura conſtat ex tribus Hyperbolis, Inſcriptâ ad *D*, & Ambigenis duabus ad *d*, *δ*: Quæ eſt Species undecima.

Species XII. *Fig.* 18.

Si radices duæ maximæ *At*, *A*ꓶ æquentur, Ovalis tangit Hyperbolam Circumſcriptam, & tangendo evadit Nodus, atque Hyperbola Nodata;

datâ: Et Figura constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis ad *d*, *δ* cum Nodatâ ad *D*: Quæ est Species decima secunda.

Species XIII. *Fig.* 19.

Si radices tres æquentur, Nodus evadit Cuspis, & curva constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis ad *d*, *δ*, & Cuspidata ad *D*: Quæ est Species decima tertia.

Species XIV, XV. *Fig.* 20, 21.

Si radices duæ minimæ æquentur; Ovalis, quæ in speciebus 10ma, & 11ma, obtinebat evadit Punctum. Et Figura vel constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis ad *d*, *δ* (*fig.* 20.) cum Circumscriptâ ad *D*: Quæ est decima quarta; vel constat ex Hyperbolis duabus Ambigenis ad *d*, *δ* (*fig.* 21.) cum Inscriptâ ad *D*: Quæ est Species decima quinta.

Species XVI, XVII, XVIII, XIX.
Fig. 20, 21, 22, 23.

Si ex radicibus duæ sint impossibiles, puræ habebuntur tres Hyperbolæ sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato. Et hujus species sunt quatuor: nempe decima sexta (*fig.* 20.) si Circumscripta jaceant ad *D*, decima septima (*fig.* 21.) si Inscripta jaceat ad *D*; decima octava (*fig.* 22.) si circumscripta jaceat ad latus trianguli, & decima nona (*fig.* 23.) si Inscripta jaceat ad latus trianguli.

Spe-

Species XX, XXI. *Fig.* 25, 26.

Si radices ſint æquales, & tertia eſt ſigni diverſi, quatuor crura in Abſciſsâ concurrunt. Et Figura conſtabit ex Inſcriptâ & Cruciformi. Quod ſi Inſcripta (*fig.* 25.) jaceat ad angulum trianguli, Species eſt vigeſima; ſin jaceat Inſcripta (*fig.* 24.) ad latus trianguli, Species eſt vigeſima prima.

Species XXII, XXIII. *Fig.* 26, 27.

Si radices duæ ſint inæquales & tertia eſt ſigni diverſi, Crura quatuor quæ in ſpeciebus duabus noviſſimis conjungebantur ab invicem ſegregantur. Et Figura conſtabit ex Hyperbolis duabus Inſcriptis, in angulis Aſymptoton oppoſitis jacentibus cum Conchoide intermediâ. Si Conchois (*fig.* 24.) jaceat ad eaſdem Aſymptoti $d\delta$ partes cum triangulo $Dd\delta$, Species eſt vigeſima ſecunda; ſin jaceat ad diverſas (*fig.* 25.) Species eſt vigeſima tertia. Hi ſunt caſus omnes radicum æquationis $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Hyperbolæ quatuor cum ſex cruribus ad tres Aſymptotos triangulum facientes jacentibus, quæ tres habent Diametros ad ordinatas duarum dimenſionum.

Si in æquatione $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ſit $bb = 4ac$, Figura habet tres Diametros ad ordinatas duarum dimenſionum: & crura eandem Aſymptoton adjacentia ad eaſdem ejus partes ſemper in plagas oppoſitas protenſa jacent. Nunquam

quam hæc Figura decussat Asymptotos, adeoque semper constat ex tribus Inscriptis Hyperbolis. Sequitur (per *Coroll.* 9. *Prop.* 16.)

Species XXIV. *Fig.* 28.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + \frac{bb}{4a}x + d = 0$ (posito pro c ejus valore $\frac{bb}{4a}$) radices tres sint reales, ejusdem signi & inæquales, Figura constat ex Hyperbolis tribus Inscriptis cum Ovali intra triangulum $Dd\delta$: Quæ est Species vigesima quarta.

Species XXV. *Fig.* 28.

Si radices duæ minimæ æquentur, Ovalis in punctum evanescet, & Figura constat ex tribus Hyperbolis Inscriptis cum Puncto conjugato: Quæ est Species vigesima quinta.

Species XXVI, XXVII. *Fig.* 28, 29.

Si radices duæ imaginariæ sint, Figura constat ex tribus Hyperbolis Inscriptis sine Ovali vel puncto conjugato. Quod si hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli $Dd\delta$ (*fig.* 28.) Species est vigesima sexta, sin jaceant (*fig.* 29.) ad latera ejusdem, Species est vigesima septima.

Hi sunt omnes casus radicum æquationis $ax^3 + bx^2 + \frac{bb}{4a}x + d = 0$; nam impossibile est duas

ejus

ejus radices maximas, vel omnes inter ſe æquari. Impoſſibile itidem eſt duas radices eſſe ejuſdem ſigni, & tertiam ſigni ab iis diverſi.

Hyperbolæ novem cum ſex cruribus jacentibus ad tres Aſymptotos ad unum punctum convergentes.

Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deſit terminus bx^2, tres Aſymptoti (per *Coroll.* 1. *Prop.* 16.) in uno eodemque puncto conveniunt. Et in illo caſu (per *Coroll.* 3. *Prop.* 16.) Figura nunquam habet Ovalem, Nodum, Cuſpidem vel Punctum conjugatum: Species ejus ergo omnes ſunt puræ, & ex puris hactenus enumeratis facillime enumerantur: ut ſequitur.

Vertuntur Species quinta & ſexta in vigeſimam octavam (*fig.* 30.)

Septima & octava in vigeſimam nonam (*fig.* 31.)

Nona in triceſimam (*fig.* 33.) quando Anguinea tranſit per centrum, & in triceſimam primam (*fig.* 32.) ubi non tranſit per centrum *A*.

Hæ quatuor Species Diametrum non habent.

Vertuntur ſpecies decima ſexta & decima octava (*fig.* 34.) in triceſimam ſecundam.

Species decima ſeptima & decima nona (*fig.* 35.) in triceſimam tertiam.

Vigeſima & vigeſima prima (*fig.* 36.) in triceſimam quartam.

Vigeſima ſecunda & vigeſima tertia (*fig.* 37.) in triceſimam quintam.

Et

Et hæc quatuor Species unicam habent Diametrum.

Ac denique vertitur Species vigesima sexta & vigesima septima (*fig.* 38.) in tricesimam sextam. Hæc Figura habet tres Diametros.

Nulla hic oriri potest difficultas, modo consideremus specierum singularum duarum, in unam hic coalescentium, diversitatem antea debitam fuisse triangulo ab Asymptotis comprehenso, quod nunc in nihil evanuit.

Hyperbolæ sex cum duobus cruribus ad eandem Asymptoton jacentibus.

Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ terminus ax^3 sit negativus, Figura (per *Coroll.* 17. *Prop.* 16.) habebit duo tantum crura ad unicam Asymptoton jacentia: & hæc crura (per *Coroll.* 11. *Prop.* 16.) ad diversas Asymptoti partes in plagas oppositas extensa jacebunt. In illo casu erit $y = \frac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2}}{x}$ ubi constat ordinatam y fore possibilem quando quantitas $-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2$ est affirmativa, & impossibilem quando negativa.

Species XXXVII. *Fig.* 39.

Si æquationis $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ radices omnes sint reales & inæquales, eæ sunto AP, $A\varpi$, $A\pi$, Ap; erige ordinatas PT, $\varpi\tau$, $\pi\daleth$, pt, & erunt T, τ, $\daleth$, t limites; & intra τ, t continetur Ovalis: adeoque Figura constat ex Ovali cum An-

Anguinea circa Aſymptoton flexâ: Quæ eſt Species triceſima ſeptima.

Species XXVIII. *Fig.* 40.

Si radices duæ mediæ *AP*, *Ap* æquentur Ovalis tangit Anguineam, & inde Figura conſtat ex Hyperbolâ unica Nodata: Quæ eſt Species triceſima octava.

Species XXXIX. *Fig.* 41.

Si radices tres ejuſdem ſigni ſint æquales, Nodus migrat in Cuſpidem, & Figura conſtat ex unicâ Cuſpidatâ: Quæ eſt Species triceſima nona.

Species XL. *Fig.* 43.

Si è radicibus ejuſdem ſigni duæ maximæ æquentur; Ovalis quæ in ſpecie 37^{ma}. obtinebat, in punctum minuetur: & Figura conſtat ex Puncto cum Anguineâ circa ordinatam primam flexâ: Quæ eſt Species quadrageſima.

Species XLI, XLII. *Fig.* 42, 43.

Si è radicibus duæ ſint impoſſibiles, manebit Anguinea pura: Quod ſi illa tranſit per centrum (*fig.* 43.) Species eſt quadrageſima prima.

At ſi non tranſit per centrum (*fig.* 42.) Species eſt quadrageſima ſecunda.

Hyperbolæ ſeptem cum duobus cruribus ad eandem Aſymptoton extenſis cum Diametro ad Ordinatas duarum dimenſionum.

Si deſit terminus *ey*, Abſciſſa eſt Diameter, & (per *Coroll.* 7. *Prop.* 16.) crura ad eaſdem

ordinatæ primæ partes jacentia in plagas contrarias in infinitum ſerpunt. Invenietur $y = \pm \frac{\sqrt{-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx}}{x}$: adeoque omnes caſus æquationis pateſcunt deſcribendo Parabolam, æquatione $z = -ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ definitam.

Species XLIII. *Fig.* 44.

Si æqations $ax^3 = bx^2 + cx + d$ radices ſint omnes reales ejuſdem ſigni & inæquales, Figura conſtat ex Conchoide cum Ovali ad convexitatem ejus: Quæ eſt Species quadrageſima tertia.

Species XLIV. *Fig.* 45.

Si radices duæ ſint inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia contrarii, Figura conſtat ex Conchoide cum Ovali ad concavitatem: Quæ eſt Species quadrageſima quarta.

Species XLV. *Fig.* 46.

Si radices omnes ſint ejuſdem ſigni, & duæ minimæ æquentur, Figura conſtat ex Hyperbola Nodatâ: Quæ eſt Species quadrageſima quinta.

Species XLVI. *Fig.* 47.

Si tres radices æquentur, Nodus evadit Cuſpis, & Figura evadit Ciſſois Veterum: Quæ eſt Species quadrageſima ſexta.

Spe-

Species LXVII. *Fig.* 49.

Si radices duæ maximæ æquentur & tertia ſit ejuſdem ſigni, Figura conſtat ex Conchoide cum Puncto ad convexitatem: Quæ eſt Species quadrageſima ſeptima.

Si radices duæ æquentur & tertia ſit ſigni contrarii, Figura conſtat ex Conchoide cum Puncto ad concavitatem (*fig.* 49.) Quæ eſt Species quadrageſima octava.

Species XLIX. *Fig.* 48, 49.

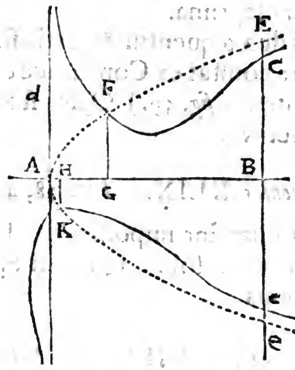
Si radices duæ ſint impoſſibiles, Figura conſtat ex Conchoide ſolâ: Quæ eſt Species quadrageſima nona.

PROP. XVII. THEOR.

ÆQuatio $xy^2 - ey = * bx^2 + cx + d$, deſignat Figuram habentem quatuor crura quorum duo ſunt Hyperbolica ad Ordinatam primam jacentia; & duo ſunt Parabolica in eandem plagam extenſa, quæ pro Aſymptoto ſortiuntur Parabolam *Conicam.*

Sit $AB = x$, $BC = y$. Invenies $y = \frac{\frac{1}{2}e}{x} \pm \frac{\sqrt{bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee}}{x}$: reducatur pars irrationalis in ſeriem $\frac{e}{2x} + \frac{d}{e}$ &c. eo citius convergentem quo minor eſt x; atque unus ordinatæ va-

lor erit $-\frac{d}{e}$ &c. alter $\frac{e}{x}+\frac{d}{e}$ &c. valor ille primus indicat ordinatam primam ſecare curvam: & valor hic ultimus $\frac{e}{x}+\frac{d}{e}$ &c. (per



Coroll. 2. *Prop.* 7.) indicat ordinatam primam *Ad* eſſe Aſymptoton, habentem duo crura ad diverſas ejus partes jacentia, in plagas oppoſitas progredientia. Evadat jam x utcunque magna, & etiam ſine limite augebuntur Ordinatæ y duo valores: quæ curva habet alia duo crura infinita: Quod ſi mutetur ſignum ipſius x, hoc eſt, ſi ſumatur Abſciſſa ad alteras partes, terminus bx^2 evadet negativus; & inde augendo x ad illas partes Ordinata tandem evadet imaginaria. Igitur curva habet quatuor tantum crura infinita. Reducatur y in ſeriem $\pm\sqrt{bx}\pm\frac{c}{2\sqrt{bx}}$ &c. Unde (per *Prop.* 6.) $\pm\sqrt{bx}$ eſt Ordinata

Aſym-

Asymptoti quæ quidem est Parabola Conica, axem habens *AB*, Latus rectum b, & verticem *A*. Q. E. D.

Coroll. 1. Si terminus cx sit affirmativus, Parabola Conica jacet intra crura hujus Figuræ; sin negativus Parabola Conica Figuræ crura in sinu suo complectitur: ut constat ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 2. Parabola hæc Conica nunquam secat curvam in pluribus punctis quam in duobus. Occurrat ordinata *BC* parabolæ *E*, & erit $BE = \pm\sqrt{bx}$, ideoque ubi Parabola secat curvam evadit $y = \pm\sqrt{bx}$, coeuntibus punctis *C*, *E*: & $yy = bx$, unde $x = \frac{yy}{b}$ quem valorem pro x in æquatione substitue, & invenietur $y = \frac{be \pm \sqrt{b^2e^2 - 4bcd}}{2c}$: puncta igitur intersectionis ad summum duo tantum sunt, quum æquatio eadem determinans est duarum dimensionum.

Coroll. 3. Igitur Parabola vel secat Figuram in duabus punctis vel in nullis; propterea quod æquatio Quadratica vel habet duas radices possibiles vel nullas.

Coroll. 4. Si $4cd$ majus sit be^2, Parabola non secat curvam, quoniam æquatio $y = \frac{be \pm \sqrt{b^2e^2 - 4bcd}}{2c}$ puncta intersectionis determinans erit impossibilis. Nam quantitas vinculo Quadratico inclusa

clusa est negativa. Et in illo casu crura Parabolæ jacent intra crura Figuræ.

Coroll. 5. Si $4cd$ æqalis sit be^2, Parabola tangit curvam. Nam sint *F*, *K* puncta intersectionis *FG*, *KH* ordinatæ ad Abscissam; possunt hæ ordinatæ ad diversas vel easdem Abscissæ partes jacere: & si sit $4cd = be^2$ istarum rectarum evanescit differentia; adeoque coeunt intersectionis puncta, & ex iis coeuntibus conflatur punctum contactûs.

Coroll. 6. Si Parabola secet curvam in duobus punctis, jacent hæc puncta ad easdem vel diversas Abscisse partes, prout terminus cx est affimativus aut negativus: ut ex *Corollario* primo facile colligitur.

Coroll. 7. Si desit terminus ey, Abscissa est Diameter, & curva non decussat Asymptoton *Ad*, sed crura ad easdem ejus partes in plagas oppositas extensa jacebunt.

Coroll. 8. Et quando deest terminus ille ey, puncta intersectionis *FK* in eâdem ordinata jacebunt, coeuntibus punctis *G*, *H*.

Coroll. 9. Et in illo casu Parabola secat curvam, vel non secat, prout terminus cx est negativus aut affirmativus: ut constat ex *Corollario* secundo.

Enumerato Specierum curvæ quam designat æquatio
$xy^2 - ey = {}^{*}\, bx^2 + cx + d.$

Figuræ septem partim Hyperbolicæ, partim Parabolicæ, scilicet quæ habent duo crura Hyperbolica, & duo Parabolica.

Spe-

Species L. *Fig.* 50.

Si æquationis $bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ extrahantur radices tres AP, $A\varpi$, $A\pi$, & ab earum extremis erigantur Ordinatæ totidem PT, $\varpi\tau$, $\pi\daleth$, hæ tangent curvam in punctis T, τ, $\daleth$, qui sunt limites. Nam si tres radices sint omnes reales ejusdem signi & inæquales, crura Hyperbolica & Parabolica ad easdem Abscissæ partes positæ conjunguntur, & intra limites τ, $\daleth$, continetur Ovalis: Quæ est Species quinquagesima.

Species LI. *Fig.* 51.

Si è tribus radicibus ejusdem signi duæ minores inter se æquentur, Ovalis accedet ad unam figurarum Hyperbolico-Parabolicarum Nodum efficiens: Quæ est Species quinquagesima prima.

Species LII. *Fig.* 52.

Si tres radices æquentur, Nodus migrabit in Cuspidem; quæ est Species quinguagesima secunda.

Species LIII. *Fig.* 53.

Si è tribus radicibus ejusdem signi, duæ majores æquentur, Ovalis evanescet in Punctum conjugatum: Quæ est Species quinquagesima tertia.

Species LIV. *Fig.* 54, 53.

Si duæ radices sint imaginariæ: manebunt duæ puræ figuræ: Quæ est Species quinquagesima quarta.

Spe-

Species LV. *Fig.* 55.

Si radices duæ æquentur, & tertia eſt ſigni contrarii; Figura evadit Cruciformis quæ eſt Species quinquageſima quinta.

Species LVI. *Fig.* 56.

Si radices duæ ſint inæquales, & tertia eſt ſigni contrarii; Figurâ conſtat ex Anguinea circa Ordinatam primam flexâ, cum Parabolâ: Quæ eſt Species quinquageſima ſexta.

Figuræ quatuor Hyperbolo-Parabolicæ cum Dia-Diametro Abſciſsâ.

Species LVII. *Fig.* 57.

Si æquationis $bx^2+cx+d=0$ radices ſint impoſſibiles, crura Parabolica junguntur cum Hyperbolicis ad eaſdem Abſciſſæ partes: Quæ eſt Species quinquageſima ſeptima.

Species LVIII. *Fig.* 58.

Si radices duæ ſint æquales & ejuſdem ſigni, Figura evadit Cruciformis: Quæ eſt Species quinquageſima octava.

Species LIX. *Fig.* 59.

Si radices ſint ejuſdem ſigni & inæquales, Figura conſtat ex Conchoide cum Parabola ad eaſdem partes Ordinatæ primæ: Quæ eſt Species quinquageſima nona.

Spe-

Species LX. *Fig.* 60.

Si radices ſint ſigni diverſi, Conchois & Parabola ad diverſas ordinatæ primæ partes jacebunt: Quæ eſt Species ſexageſima.

PROP. XVIII. THEOR.

Vid. Fig. 61, 62, 63, 64.

ÆQuatio $xy^2 - ey = * * cx + d$ deſignat Figuram habentem ſex crura Hyperbolica ad tres Aſymptotos, quarum duæ ſunt Abſciſſæ parallelæ, jacentia.

Reducatur y in ſeriem $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. eo citius convergentem, quo minor eſt x: Unde (per *Cor.* 2. *Prop.* 7.) ordinata prima eſt Aſymptotos habens duo crura ad diverſas ejus partes jacentia, & in plagas oppoſitas progredientia. Abſciſſa x ad utraſque partes in infinitum augeri poteſt, & ordinata nunquam evadet impoſſibilis. Reducatur y in ſeriem eo citius convergentem quo major eſt x, $\pm\sqrt{c} + \frac{\pm d + e\sqrt{c}}{2x\sqrt{c}}$ &c. Unde (per *Prop.* 6.) $\pm\sqrt{c}$ eſt ordinata Aſymptoti ad Abſciſſam x pertinens. Sume igitur in ordinatâ primâ duas rectas hinc inde æquales $\sqrt{c}$, & rectæ ductæ per earum extremitates Abſciſſæ parallelæ, erunt duæ Aſymptoti.

Coroll. 1. Si $d+e\sqrt{c}$ ſit quantitas affirmativa, Aſymptotos dg jacet inter ejus crus & Abſciſſam; ſin negativa contrarium accidit.

Coroll. 2. Crura adjacentia Aſymptotos dg, $\delta\gamma$ ſemper jacent ad diverſas earum partes: Nam ſi ſignum Abſciſſæ mutetur, quantitatis $dt+e\sqrt{c}$ ſignum mutabitur.

Coroll. 3. Curva non decuſſat Aſymptotos dg, $\delta\gamma$ (per *Coroll.* 6. *Prop.* 4.)

Coroll. 4. Eodem modo oſtenditur, quo in *Coroll.* 1. quod ſi ſit $d-e\sqrt{c}$ quantitas affirmativa, Aſymptotos $\delta\gamma$ jacet inter crus & Abſciſſam.

Coroll. 5. Ergo ſi $d+e\sqrt{c}$, $d-e\sqrt{c}$ ſint quantitates ejuſdem ſigni, Aſymptoton dg, $\delta\gamma$ extremitates unæ ad eandem plagam tendentes jacent extra crura, & reliquæ intra.

Coroll. 6. Si $d+e\sqrt{c}$, $d-e\sqrt{c}$ ſint ſigni contrarii, Aſymptoton dg, $\delta\gamma$ extremitates ad plagas oppoſitas ductæ jacebunt intra crura, reliquæ extra.

Coroll. 7. Crura adjacentia Aſymptoton $d\delta$, jacent ad eaſdem vel diverſas ejus partes, prout abeſt vel adeſt terminus ey.

Coroll. 8. Si deſit terminus ey, extremitates unæ Aſymptoton in eandem plagam extenſæ jacent intra crura, reliquæ extra.

Coroll. 9. Si terminus cx ſit negativus; Figura habet duo tantum crura ad ordinatæ primæ eaſdem vel contrarias partes jacentia, prout abeſt vel adeſt terminus ey.

Enume-

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - ey = cx + d$.

Species LXI. *Fig.* 61.

Si æquationis $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$, radices sint reales, eæ necessario habebent eadem signa, & erunt inæquales: atque Figura constabit ex tribus Hyperbolis, Inscriptâ ad *d*, Ambigenâ ad *δ*, cum tertiâ intra Asymptotos parallelas: Quæ est Species sexagesima prima.

Species LXII, LXIII. *Fig.* 62, 63.

Si æquationis illius radices sint imaginariæ, habebitur Anguinea intra Asymptotos parallelas, cum duabus Inscriptis: si Anguinea transit per centrum (*fig.* 63.) Species est sexagesima secunda; si non transeat per centrum (*fig.* 62.) Species est sexagesima tertia.

Species LXIV. *Fig.* 64

Si desit terminns *ey*, Figura constat ex Hyperbolâ intra Asymptotos parallelas, cum duabus Inscriptis: Quæ est Species sexagesima quarta.

Species LXV, LXVI. *Fig.* 65, 66.

Si æquationis $xy^2 + ey = cx + d$, terminus *cx* sit negativus; Figura constat ex Anguineâ pura: si Anguinea illa transit per centrum, Species est sexagesima quinta; at si non transit per centrum, Species est sexagesima sexta.

Species LXVII. *Fig.* 67.

Si desit terminus ey, æquatio $xy^2 = -cx + d$, designat Conchoidem puram: Quæ est Species sexagesima septima.

PROP. XIX. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = * * * + d$ *designat Figuram habentem quatuor crura.*

VIde *Fig.* 68. ubi $AB = x$, $BC = y$, invenietur $y = \frac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{dx + \frac{1}{4}ee}}{x}$, id est per methodum serierum, $y = \frac{e}{x} + \frac{d}{e} +$ &c. Unde Ordinata prima AG est Asymptotos habens duo crura adjacentia. Augeatur jam x perpetuo, & y non evadet impossibilis; quare curva habet alia duo crura: quod si mutetur signum ipsius x, evadet y tandem imaginaria; adeoque curva ad illas plagas in infinitum non pergit. Quoniam vero augendo x, y perpetuo diminuitur, patet Abscissam esse alteram Asymptoton habentem duo crura ad diversas ejus partes jacentia, in plagam eandem protensa. Q. E. D.

Coroll. Abscissa non secat curvam; nam (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) tria intersectionis puncta abeunt in infinitum.

Spe-

Species LXVIII. *Fig.* 68.

Si adſit terminus *ey*, Figura conſtat ex duabus Hyperbolis, Inſcriptâ & Abigenâ: Quæ eſt Species ſexageſima octava.

Species LXIX. *Fig.* 69.

At ſi deſit terminus *ey*, Figura conſtat ex duabus Inſcriptis in angulis Aſymptoton deinceps jacentibus: Quæ eſt Species ſexageſima nona.

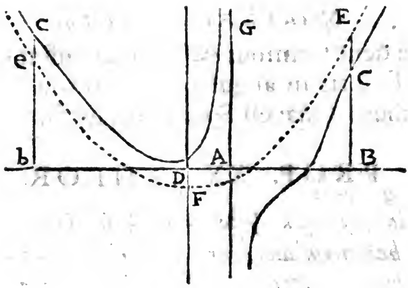
PROP. XX. THEOR.

Æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *deſignat Figuram habentem duo crura Hyperbolica ad Ordinatam primam jacentia, & duo Parabolica quæ pro Aſymptoto habent Parabolam Conicam.*

SIT Abſciſſa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. Eſt $y = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$, ſit x infinite parva, & erit $y = \frac{d}{x}$, igitur (per *Coroll.* 2. *Prop.* 16.) Ordinata prima habet duo crura ad diverſas ejus partes jacentia, & in plagas oppoſitas progredientia. Augeatur jam x tam verſus dextram quam ſiniſtram in infinitum, & valor ipſius y ſemper erit affirmativus, & etiam ſine limite increſcet. Sumatur $BE = ax^2 + bx + c$, eritque (per *Prop.* 6.) locus omnium E Aſymptotos curvæ, quæ quidem eſt Parabola Conica. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1. Hæc Figura nunquam decuſſat ejus Aſymptoton *AG*. Nam tria interſections puncta abeunt in infinitum. Adeoque crura Hyperbolica & Parabolica ad eaſdem partes rectæ



AG jacentia ſemper copulantur: Et proinde hujus Figuræ Species tantum eſt unica, quæ eſt ſeptuageſima.

Coroll. 2. Parabola Conica nunquam decuſſat hanc curvam; ſecet enim, ſi fieri poſſit, & erit $EC = 0$, adeoque etiam $d = 0$, quod fieri nequit.

Coroll. 3. Sit $AD = -\frac{b}{2a}$, ordinata $DF = \frac{4ac - bb}{4a}$: Vertice *F*, Diametro *DF*, & latere recto $\frac{1}{a}$ deſcripta Parabola eſt Aſymptotos curvæ.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

Æquatio $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *designat figuram habentem duo crura Parabolica in oppositas plagas errantia.* Vide fig. 70.

Augeatur x in infinitum, & simul augebuntur ordinatæ y duo valores hinc inde æquales, ergo curva habet duo crura infinita. At si mutetur signum Abscissæ, terminus ax^3 evadet negativus: & proinde datur certus limes, ultra quem x in illas plagas non pergit. Reducendo y in seriem patebit crura esse Parabolica. Q. E. D.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Species LXXI. *Fig.* 70, 71.

Si æquationis $ax^3+bx^2+cx+d=0$ radices omnes sint reales & inæquales, Parabola habet Ovalem ad verticem: Quæ est Species septuagesima prima.

Species LXXII, LXXIII. *Fig.* 73, 74.

Si radices duæ æquentur, Figura vel prodit Nodata (*fig.* 73.) quæ est Species septuagesima secunda; vel Punctata (*fig.* 74.) quæ est Species septuagesima tertia.

Species LXXIV. *Fig.* 75.

Si tres radices æquentur, Figura erit Cuspidata, quæ est Species septuagesima quarta.

Estque

Estque hæc Figura Asymptotos Parabolarum quam designat æquatio $yy = ax^3 + bxx + cx + d$.

Species LXXV. *Fig.* 73, 74.

Si radices duæ sint impossibiles, Figura erit pura Campaniformis, Speciem constituens septuagesimam quintam.

Species LXXVI. *Fig.* 77.

In quarto casu æquatio erat $y = ax^3 + bx^2$ $cx + d$: quæ (per *Prop.* 8.) designat Figuram habentem crura contraria, quæ *Cubica* Parabola dici solet. Et sic Species omnino sunt septuaginta sex.

Lineæ tertii ordinis inter se formâ haud parum differunt, scilicet ut Ellipsis à circulo, vel Hyperbola æquilatera à reliquis.

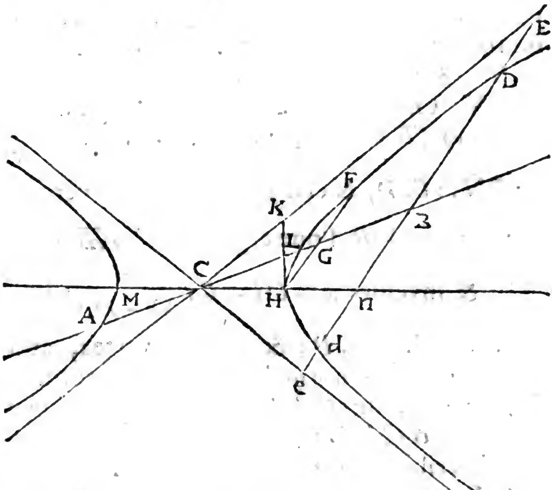
Sed & aliquando vertices Figurarum quas concavas descripsimus, formam Cuspidis induunt: at Cuspides istiusmodi non componuntur ex Nodis infinite parvis, nec unquam prodeunt admodum acuti.

Determinatio Locorum Geometricorum.

POstquam Species omnes Linearum alicujus ordinis enumerantur, convenit ut dignoscatur Species quam constituit Linea particularis æquatione quâlibet propositâ denotata. Innumeræ enim æquationes, quoad formam multum inter se discrepantes, eandem Lineam desig-

designare possunt. Lineæ quæ excurrunt in infinitum ex Asymptotis suis optime determinantur; Ovales vero ex Diametris.

Sit $y^2 + Axy + By + Cx^2 + Dx + E = 0$ æquatio universalis ad Coni sectiones. Hæc æquatio (per *Prop.* 10.) facillime convertetur in hanc



$yy = Ax^2 + Bx + C$. Et Figura erit Hyperbola, Parabola aut Ellipsis prout terminus Ax^2 affirmativus est, nullus aut negativus.

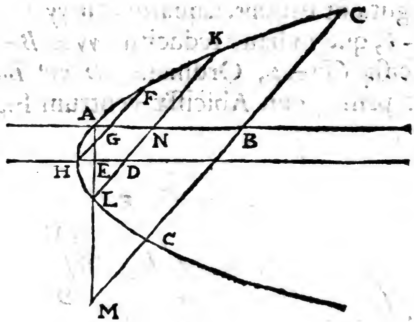
In primo casu quando, Figura est Hyperbola, sumendo Abscissam novam $= x + \frac{B}{2A}$ æquatio induet hanc formam $yy = Ax^2 + B$. Sit jam CB

Abſciſſa $=x$, Ordinata $BD=y$; & erit principium Abſciſſæ *C* centrum Hyperbolæ. Sume in ordinatâ *BD*; *BE*, *Be* hinc inde æquales *x*, & (per *Prop. 6.*) erunt *CE*, *Ce* duæ Aſymptoti: ducatur *CHN* biſecans angulum Aſymptoton, & erit *CN* axis. Sit *H* vertex Figuræ, *HGF* ordinatim applicata ad Diametrum *CB*, tranſiens per verticem. Concipiatur jam ordinata *Dd* motu parallelo ferri donec cum ordinatâ *FH* coeat; & in illo caſu erit $dN=0$, adeoque $BD=BN$. Ob datos trianguli *CBN* angulos, datur ratio *CB* ad *BN*, vel *x* ad *BN*. Sit ergo $x:BN::C:D$, & erit $BN=\frac{Dx}{C}$; eſt vero $BD=y=\sqrt{Ax^2+B}$. Pone ergo $(BD=)\ \sqrt{Ax^2+B}=\frac{Dx}{C}$, & invenies $x=CG=C\sqrt{\frac{B}{D^2-AC^2}}$: ſit ergo $CG:GH::C:D$: & erit *H* vertex, atque inde ſi erigatur normalis *HK* Aſymptoton ſecans in *K*; erunt *CH*, *HK* ſemi-axes conjugati. Datis vero *CH*, *HK* ſemi-axibus conjugatis facile deſcribitur Hyperbola. Q. E. F.

Si Figura eſt Parabola, æquatio erit $yy=Ax+B$, vel ſumendo principium Abſciſſæ in curvâ, $yy=Ax$. Sit Abſciſſa $AB=x$, ordinata *BC* vel $Bc=y$. Per *A* duc *ALM* perpendicularem ad Abſciſſam: ſecat ea curvam in *L*, ordinatam vero *Cc* in *M*. Sit *LDNK* ordinata Abſciſſam in *N* ſecans. Moveatur ordinata *BC* motu parallelo donec coincidat cum *LDK*, & in illo caſu erit $Mc=0$, & proinde $BM=BC=y$.

Ob-

Ob datos trianguli *ABM* angulos datur ratio *AB* ad *BM*, vel x ad *BM*; ſit igitur $x : BM ::$ $C : D$, & erit $BM = \frac{Dx}{C}$. Pone ergo $\frac{Dx}{C} = y =$

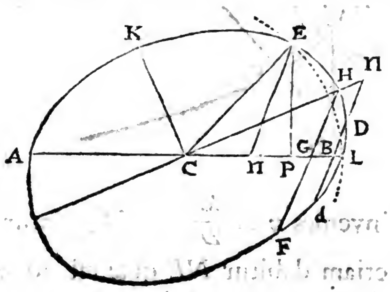


$\sqrt{Ax}$, & invenies $x = \frac{AC^2}{D^2} = AN$; datur ergo *AN*, & etiam dabitur *NL* quæ eſt ad *AN* ut *D* ad *C*. Datur ergo punctum *L*, & recta *AL* tam magnitudine quam poſitione. Biſeca *AL* in *E* & ſit *HED* normalis ad medium ejus punctum *E*, & erit *HE* axis. Sit vertex *H*, *HGF* ordinata ad Diametrum *AB* tranſiens per *H*, & in illo caſu erit $y = GH$, eſt vero *GH* data quantitas: & erit $x = \frac{GH^2}{A} = AG$. Datur ergo punctum *G*; per quod punctum ſi ducatur ordinata *GH* æqualis datæ rectæ *DN*, dabitur vertex *H*, & recta *HE*; eſt vero latus rectum

 prin-

principale æquale $\frac{AE^2}{HE}$, quod exinde dabitur. Datis jam axe *HE*, vertice *H* & latero recto $\frac{AE^2}{HE}$ describi potest Parabola. Q. E. F.

Si Figura sit Ellipsis, æquatio erit $yy = -Ax^2 + Bx + C$, que in hanc reducitur $yy = B - Ax^2$. Sit Abscissa $CB = x$, Ordinata *BD* vel $Bd = y$. Eritque principium Abscissæ centrum Figuræ.



Secet curvam in *L*, & erit $CL = \sqrt{\frac{B}{A}}$: centro *C* radio *CL* describe circulum *LE* Ellipsin secantem in *E*: sitque *EN* ordinata; *EP* perpendicularis in Abscissam; & dabitur specie triangulum *NPE*. Sit ergo $NE : EP :: C : D$, id est $y : EP :: C : D$, unde $EP = \frac{Dy}{C}$, $PN = \frac{C}{y} \times \sqrt{C^2 - DD}$; est vero per naturam curvæ CN

$= \sqrt{}$

$=\sqrt{\frac{B-yy}{A}}$, adeoque tota $CP=\frac{y}{C}\sqrt{C^2-DD}$ $+\sqrt{\frac{B-yy}{A}}$; & eſt $CE=\sqrt{\frac{B}{A}}$ adeoque æquatio $CE^2=CP^2+PE^2$ dabit y vel EN; & inde invenietur EN Abſciſſa correſpondens; atque adeo datur punctum E, & per conſequens recta CE poſitione. Duc rectas KC, CH biſecantes angulos ACE, ECL; & hi erunt axes, qui itaque poſitione dantur. Eorum vero magnitudo ſic determinantur: Occurrat ordinata BD axi in N, & ducatur HGF. Ob datum ſpecie triangulum CGH, datur ratio CG ad GH, ſit ergo $CH:GH$ vel $CB:BN::C:D$, & erit $BN=\frac{Dx}{C}$. Sed cum ordinata BD coincidit cum GH, evadit BN æqualis $GH=y=\frac{Dx}{C}$; in æquatione ſubſtituendo illum ipſius valorem, erit $\frac{D^2x^2}{C^2}=$ $B-Ax^2$, unde $x=CG=C\sqrt{\frac{B}{D^2+AC^2}}$; adeoque dabitur ordinata GH; & punctum H, atque inde dabitur CH magnitudine. Et eodem modo invenire licet axem minorem.

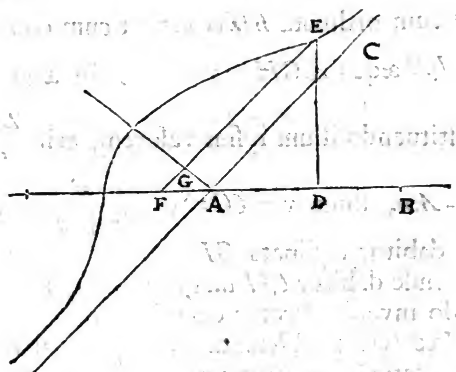
Hæc tria Problemata ſoluta dare malui ex nudâ naturâ æquationum curvas definientium; quam per quaſdam *Apollonii* Propoſitiones more veterum Geometrarum: Hoc modo enim melius innoteſcit analogia inter Loca ſecundi ordinis & Loca tertii & ſuperiorum ordinum.

Pro-

Proprietates Sectionum Conicarum à Geometris hactenus traditæ sufficiunt ad determinanda Loca quæ incidunt in Sectiones Coni: Consimiles vero Linearum superiorum ordinum proprietates traditas nondum habemus. Quâ ratione vero invenire licet quam Speciem constituit Linea tertii ordinis æquatione quâlibet designata, ex Propositione decimâ quintâ constare potest: quod per sequentia plenius adhuc constabit.

Exemplum Primum.

OPorteat invenire quam speciem constituit Linea æquatione $y^3 + x^3 = a^3$ designata, ubi ordinatæ insistunt abscissâ ad angulos rectos.



Mutetur signum Abscissæ & æquatio evadet $y^3 = x^3 + a^3$; & inde (per Theorema *Neutoni*) $y = x + \frac{aaa}{3x^2} + \&c.$ Sit Abscissa *AB*, duc rectam

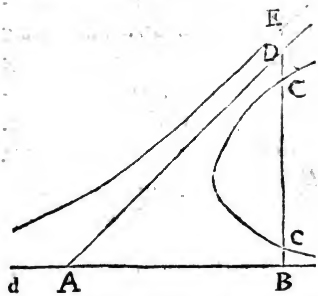
AC

AC per initium Abſciſſæ, quæ cum Abſciſsâ angulum ſemirectum contineat, & (per *Prop.* 6.) erit *AC* Aſymptotos. Et quoniam unica tantum iſtiuſmodi ſeries obtineri poteſt, curva habet niſi duo crura infinita ad eandem Aſymtoton jacentia, & (per *Coroll.* 2. *Prop.* 6.) hæc crura jacent ad eaſdem Aſymptoti partes; & inde (per *Coroll.* 7. *Prop.* 16.) curva habet diametrum ad ordinatas duarum dimenſionum. Sit *E* punctum quodlibet in curvâ, Ordinata $ED=y$, Abſciſſa $AD=x$; Ordinata nova Aſymptoto parallela $FE=v$, Abſciſſa correſpondens $AF=z$; erit $y=v\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $x=v\sqrt{\tfrac{1}{2}}-z$. In æquatione $y^3=x^3+a^3$, hoſce valores ſubſtitue, & proveniet $\tfrac{1}{2}v^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}v^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\tfrac{3}{2}zv^2+3z^2v\sqrt{\tfrac{1}{2}}-z^3+a^3$, vel $3zv^2-6z^2v\sqrt{\tfrac{1}{2}}=2a^3-2z^3$. Unde (per *Prop.* 10.) $z\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ eſt ordinata Lineæ biſecantis ordinatas v ad curvam terminatas: Duc igitur rectam *AG* per principium Abſciſſæ Aſymptoton ſecantem ad rectos angulos; & illa erit recta biſecans ordinatas. Occurrat ea ordinatæ *EF* in *G*; & ſit Abſciſſa nova $AG=x$, ordinata Correſpondens $EG=y$. Erit $z=x\sqrt{2}$, $v=y+x$; in æquatione $3zv^2-6z^2v\sqrt{\tfrac{1}{2}}=2a^3-2z^2$ hoſce valores pro z, v ſubſtitue, & orietur $3xy^2\sqrt{2}=2a^3-x^3\sqrt{2}$, vel ponendo $a=c\sqrt{2}$, $3xy^2\sqrt{2}=4c^3\sqrt{2}-x^3\sqrt{2}$, & dividendo per $\sqrt{2}$, $3xy^2=4c^3-x^3$: Cumque æquatio hæc ſit ejuſdem formæ cum hâc $xy^2-ey=ax^3+bx^2+cx+d$, ubi deeſt terminus ey, & ax^3 eſt negativus, & præterea æquationis ax^3+bx^2+cx+d radices duæ ſunt impoſſibiles, Figura conſtituit Speciem quinquageſimam nonam. Q. E. I.

Exem-

Exemplum Secundum.

OPorteat invenire quam speciem constituit Linea æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$ designata, ubi ordinatæ insistunt abscissæ ad angulos rectos: hujus æquationis tres radices seu valores ipsius y reductæ in series eo citius convergentes quo major est abscissa x sunt



$x + \frac{\sqrt{ax}}{aa} - \frac{a^3}{2x^2}$ &c.

$x - \frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2}$ &c.

$\frac{a^3}{x^2} + \frac{2a^6}{x^5} + \frac{7a^9}{x^8} +$ &c.

Sit Abscissa $AB = x$, Ordinata rectangula $Bc\,C\gamma$: in illâ ordinatâ sit $BD = AB$, junge AD, & (per *Prop.* 6.) erit illa Asymptotos, quæ pro duabus Asymptotos coeuntibus habenda est; siquidem duo termini priorum serierum coincidunt: Unde hæc Linea vel constituit speciem sexagesimam octavam vel sexagesimam nonam, nam hæ duæ species solæ sunt Linearum tertii ordinis quæ habent Asymptotos duas coincidentes. Series tertia $\frac{a^3}{x^3} + \frac{2a^6}{x^5} + \frac{7a^9}{x^8} +$ &c. indicat Abscissam esse Asymptoton habentem duo crura ad oppositas plagas protensa & ad easdem ejus partes jacentia, quoniam mutando signum abscissæ terminus $\frac{a^3}{x^2}$ manet affirmativus. Et quoniam in extremitate Asymptoti AD ad distantiam infinitam sitâ jacet punctum curvæ duplex; Asymptotos illa habet crura sua ad diversas ejus partes jacentia, & in plagas easdem protensa. Unde facile videre est hanc curvam constituere Speciem sexagesimam nonam: Habetque Asymptoton AD pro Diametro ad ordinatas duarum dimensionum, quæ parallelæ sunt Asymptoto AB. Q.E.I.

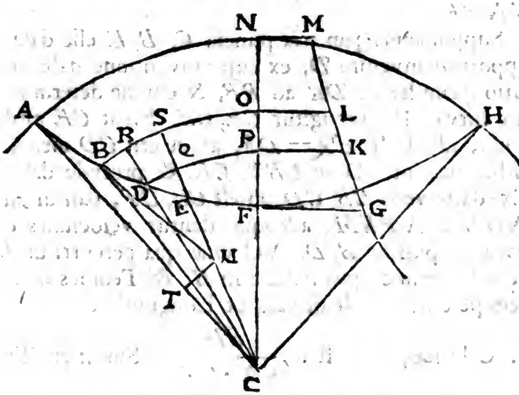
In-

Inventio Lineæ celerrimi descensus in quacunque hypothesi gravitatis.

PROBLEMA.

Invenire Lineam celerrimi descensûs, datâ lege vis Centripetæ.

SIT *C* centrum virium, *ADFH* linea quæsita, *A* punctum de quo corpus cadere debet, *B,D,E* tria puncta, quorum distantiæ sunt quam minimæ; junge *CB, CD, CE*: Centro *C* & radiis *CB, CD*, describe circulos *BO, DP*, quorum hic secet *CN*



(axem curvæ) & *CE* in *P*, *Q* respective: ille vero rectas *CD, CE* in *R*, *S*; axem vero in *O*.

Sit *MLKG* linea cujus Ordinatæ *NM, OL, PK, FG*, insistentes Abscissâ *GN* normaliter proportionales sunt vi centripetæ in punctis *N, O, P, F*, respectivè. Cadat jam Corpus à puncto *N*, versùs centrum vi solâ centripetâ agitatum, & (per Prop. 39. Lib. 1. *Princip. Newtoni*) ejus velocitas in puncto quovis *O* erit ut areæ *NOLM* latus quadratum.

Jaceant puncta *A, N* in circumferentiâ Circuli cujus centrum *C*, & velocitates corporum in curvâ *AB* & recta *NC* motorum in omnibus æqualibus à centro *C* distantiis erunt æquales. Nam (per Prop. 40. Lib. 1. *Newtoni*) si eorum velocitates in aliquâ æquali altitudine sint æquales, in omni æquali altitudine æquales erunt: at corporum istorum velocitates in punctis *A, N*, erant æquales, quippe nullæ; ergo & in omnibus distantiis æqualibus æquales erunt. Igitur velocitas corporis in curva *ABF* moti, per Areæ curvi lineæ *MLG* latus quadratum rite representabitur: scilicet velocitas in *B* est ut $\sqrt{NOLM}$, velocitas in *D* est ut $\sqrt{NPKM}$.

Supponamus jam tria puncta *C, B, E* esse data, & opporteat invenire *D*, ex cujus inventione dabitur relatio quam habet *DR* ad *RB*, & exinde determinabitur curva. Dantur igitur *CE, CB*. Fluat *CE* uniformiter, id est, sit $EQ = DR$, atque erit *CD* media Arithmetica inter Datas *CB* & *CE*, & proinde dabitur. Ex datis vero *CB, CD*, id est *CO, CP*, dantur areæ *NOLM, NPKM*; adeoque dantur velocitates corporis ad puncta *B, D*. Velocitas qua percurritur *BD* ea est quam corpus habuit in *B*; & Tempus quo eadem percurritur est directe ut Longitudo & reciproce ut Celeritas, hoc est ut $\frac{BD}{\sqrt{NOLM}}$. Similiter Tempus quo percurritur *DE* est ut $\frac{DE}{\sqrt{NPKM}}$; & inde

Tempus

Tempus quo percurritur BE eſt ut $\frac{BD}{\sqrt{NOLM}} + \frac{DE}{\sqrt{NPKM}}$: ſed quia tempus quo tota curva percurritur ſupponitur breviſſimum, erit tempus per quamlibet ejus partem etiam breviſſimum. Et proinde fluxio quantitatis huic tempori proportionalis æqualis nihil.

Hiſce præmiſſis, ſit $CD = CP = x$, $DR = PO = \dot{x}$, $BR = \dot{y}$, $DQ = \dot{z}$, erit $BD = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $DE = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$: hiſce valoribus pro BD, DE ſubſtitutis, erit $\sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{NOLM}} + \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}{NPKM}}$ quantitas tempori proportionalis, adeoque ejus fluxio $= 0$, hoc eſt,

$$\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{NOLM}} + \frac{\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{NPKM}} = 0;$$

nam $\dot{x}$ & areæ $NOLM$, $NPKM$ ſunt quantitates non fluentes. Ob data tria puncta C, B, E; datur BS (normalis à vertice Trianguli CBE in baſin CE Demiſſa) $= BR + RS = BR + DQ = \dot{y} + \dot{z}$, adeoque $\dot{y} + \dot{z}$ eſt data quantitas, & ejus fluxio $\ddot{y} + \ddot{z} = 0$, vel $\ddot{z} = -\ddot{y}$. In æquatione

$$\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{NOLM}} = \frac{-\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{NPKM}}$$

pro $\dot{z}$ pone ejus valorem

$-\ddot{y}$ & divide æquationem per $\ddot{y}$ atque erit
$$\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}\sqrt{NPHM}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}}.$$
Cumque hoc universaliter in omnibus curvæ punctis obtineat, patet esse $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}}$ datam quantitatem, vel $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}} = \frac{1}{A}$ (ubi A est data quantitas) & $A\dot{y} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$: quæ æquatio determinat curvam. Q. E. I.

Coroll. 1. Est $A^2 = NFGM$. nam cum recta CB vel x coincidit cum CF, ea est normalis in curvam & $\dot{x} = 0$, atque area $NOLM$ evadit $=$ areæ $NFGM$. In æquatione igitur $A\dot{y} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$ evanescat $\dot{x}$ & fit $NOLM = NFGM$, atque erit $A\dot{y} = \sqrt{\dot{y}^2}\sqrt{NFGM}$, id est, $A\dot{y} = \dot{y}\sqrt{NFGM}$ & dividendo per $\dot{y}$, $A = \sqrt{NFGM}$. Q. E. D.

Coroll. 2. $BD:BR$ ut velocitas maxima quam corpus in motu per curvam AF acquirit ad ejus velocitatem in puncto B. Nam est $A\dot{y} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$, vel $\sqrt{NFGM}\times\dot{y} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$, adeoq; $BD:BR::\sqrt{NFGM}:\sqrt{NOLM}$; hoc est, ut velocitas maxima ad velocitatem in puncto B.

Coroll.

Coroll. 3. *BR* : *RD* : : √*NOLM* : √*FOLG*.

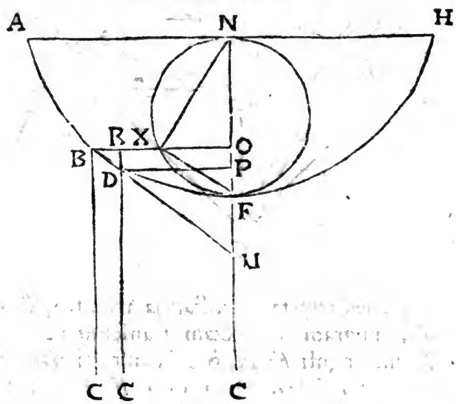
Coroll. 4. Si ſint *A*, *H*, puncta curvæ altiſſima, & ducantur *CA*, *CH*, hæ tangent curvam in punctis *A*, *H*.

Coroll. 5. Igitur in nulla hypotheſi gravitatis Recta linea eſt via celerrimi deſcenſus; præterquam ubi corpus deſcendens directe tendit ad centrum.

Coroll. 6. Sit *BT* longitudinis cujuſvis, & *BT* : *TU* : : √*FOLG* : √*NOLM* : ſit vero *TU* in *TB* normalis, junge *BU*, & illa Tanget curvam in puncto *B*. Nam *DR* : *BR* : √*FOLG* : √*NOLM*, ergo *DR* : *BR* : : *BT* : *TU*; & proinde *BU* tangit curvam ad punctum B. Q. E. D.

Proprietates hucuſque traditæ ſunt generales, Lineæ celerrimi deſcenſûs in omni hypotheſi gravitatis univerſaliter competentes. Deſcendamus jam ad caſus particulares.

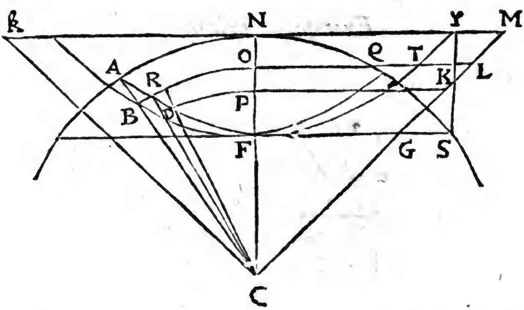
Exemplum primum.



SUpponamus vim centripetam eſſe uniformem & agere in parallelis: quo in caſu punctum *C* abit in infinitum,

infinitum, exiſtentibus *CF*, *CD*, *CB* parallelis. Peripheriæ *AN*, *BO*, *DP* & curva *MG* migrant in rectas, & area *NOLM* in rectangulum, atque area *NOLM* ad aream *NFGM* ut *NO* ad *NF*. & inde $BD : BR :: \sqrt{NF} : \sqrt{NO}$. Supra diametrum *NF* deſcribe circulum *NXF* ſecantem ordinatam *BO* in *X*, junge *NX*, *FX*, & *BU* ſit tangens ad *B*. Propter ſimilia Triangula *NXF*, *NXO*, *FXO*. $NF : NX :: NX : NO$. ergo $\sqrt{NF} : \sqrt{NO} :: NF : NX$. & $NF : NX :: FX :: XO$. unde $DB : BR :: FX : XO$. duc tangentem *BU*, & erit $BD : BR :: BU : BO$, adeoque $BU : BO :: XF : XO$. ergo tangens *BU* ſemper parallela eſt Chordæ *XF* quæ eſt notiſſima proprietas Cycloidis vulgaris.

Exemplum ſecundum.



SIT vis centripeta ut diſtantia à centro, & curva *MLG*, migrabit in rectam tranſeuntem per centrum *C*. ſint anguli *KCN*, *kCN* ſemirecti. $BR : DR :: \sqrt{NOLM} : \sqrt{FOLG}$. Jam ſit $CF = a$, $CO = x$, $CN = r$, & erit area $NOLM = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}x^2$, $FOLG = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$, unde $x : y :: \sqrt{x^2 - a^2}\,\sqrt{r^2 - x^2}$. Deſcribatur

ſcribatur Hyperbola FTr, vertice F & Aſſymtotis CK, Ck. Occurrat OL Hyperbolæ in T, & circulo in Q; atque erit per hujus Hyperbolæ & circuli naturam $OT = \sqrt{x^2 - a^2}$, $OQ = \sqrt{rr - xx}$. ergo $DR : BR :: OT : OQ$.

Hujus Curvæ Rectificatio, per quadrat. Hyperb.

Patet $BD : DR :: FS : OT$. hoc eſt, incrementum curvæ ad incrementum Axis OP ut data recta FS ad Hyperbolæ ordinatam reſpectivam OT. Erit igitur componendo, ut omnes BD ad omnes OP ita totidem FS ad totidem ordinatas Hyperbolæ. Hoc eſt ut curva AF ad axem ejus NF, ita rectangulum $NFSr$ ad aream Hyperbolicam $NFTr$. Etenim area illa $NFTr$ eſt ſumma ordinatarum OT.

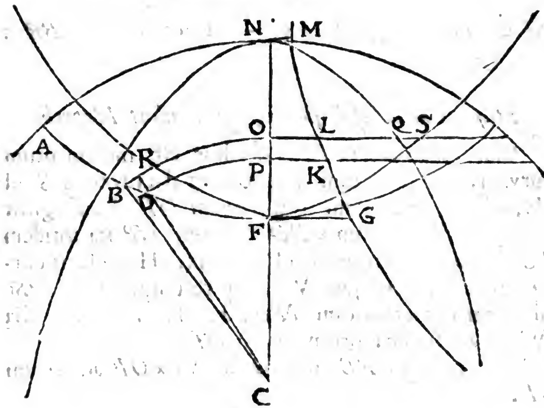
Erit etiam ut AB ad NO ita $Nr \times OF$ ad aream OFT.

Hujus Curvæ Quadratura per quad. Hyp. & Circ.

Fluxio areæ, ſcil. triangulum $CBD = \frac{1}{2} CB \times BR$ $= \frac{1}{2} x \times \dot{y} = \frac{1}{2} \dot{x} x \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{x^2 - a^2}}$. Unde $CBD : \frac{1}{2} x \dot{x} :: \sqrt{r^2 - x^2} : \sqrt{x^2 - a^2}$, Eſt vero CBD fluxio areæ CFB, & $\frac{1}{2} x \dot{x}$, fluxio quantitatis $\frac{1}{4} x^2$, ergo ut area CFB ad $\frac{1}{4} x x$ ita omnes $\sqrt{r^2 - x^2}$ ad omnes $\sqrt{x^2 - a^2}$; hoc eſt $CFB : \frac{1}{4} x x ::$ area $FOQS$: aream FOT. Coincidat jam CB cum CF & evaneſcet area CFB, at evadet $\frac{1}{4} x x = \frac{1}{4} CF^2 = \frac{1}{4} a a$. Igitur ſtatim apparet $\frac{1}{4} xx$ fluentem quantitatis $\frac{1}{2} x \dot{x}$ minui debere quantitate $\frac{1}{4} a a$, & proinde erit vere $CFB : \frac{1}{4} x x - \frac{1}{4} a a :: FOQS : FOT$. & Area $ABC : \frac{1}{4} x x - \frac{1}{4} a a :: NOQ : NOTr$. atque area tota $CFA : \frac{1}{4} rr - \frac{1}{4} aa :: NSF : NF$.

Exem-

Exemplum tertium.



SIT vis centripeta reciproce ut quadratum distantiæ à centro; & erit ordinata $OL = \frac{1}{xx}$, adeoq; per notas quadrandi methodos $FOLG = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$, $NOLM = \frac{1}{x} - \frac{1}{r}$; & inde $BR^2 : RD^2 :: \frac{1}{x} - \frac{1}{r} : \frac{1}{a} - \frac{1}{x} :: \dot{y}^2 : \dot{x}^2$, vel, quod idem est, $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx - ra : ra - ax$, & $\dot{x} : \dot{y} : \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$. Igitur latere recto r, axe FN, vertice F describe Parabolam FS; item latere recto a axe NF, vertice N describe Parabolam NQ: occurrat ordinata OL Parabolis hisce in Q, S; & erit $\dot{x} : \dot{y}$ vel $DR : BR :: OS : OQ$. Nam est $OS = \sqrt{:x - ra}$, & $OQ = \sqrt{ra - ax}$.

Hujus

Hujus curvæ rectificatio.

Quoniam $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx - ra : ra - ax$, erit $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 : \dot{x}^2 :: rx - ax : rx - ra$; & inde $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} : \dot{x} :: \sqrt{rx - ax} : \sqrt{rx - ra} :: BD : DR$, hoc est, ut fluxio curvæ ad fluxionem Abscissæ: & componendo, erit ut summa omnium $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ad omnes $\dot{x}$, ita omnes $\sqrt{rx - ax}$ ad tot $\sqrt{rx - ra}$, hoc est, $BF : FO :: x\sqrt{rx - ax} - a\sqrt{ar - aa} : \overline{x - a}\sqrt{rx - ra}$ (nam $x\sqrt{rx - ax}$ fluens fluxionis $\dot{x}\sqrt{rx - ax}$ minuenda est quantitate $a\sqrt{ar - aa}$.)

Curva hæc perfecte quadrabilis est, nam $\dot{x} : \dot{y} :: \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$, ergo $x\dot{x} : x\dot{y} :: \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$; hoc est, $x\dot{x} : 2CBD$ vel $\frac{1}{2}x\dot{x} : CBD :: \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$. Et sumendo summas omnium, erit $\frac{1}{4}xx : CFB :: \overline{x - a}\sqrt{rx - ra} : ra\sqrt{ra - aa} - \overline{r - x}\sqrt{ra - ax}$. Et erit tota area CFA (comprehensa rectis CF, CA & curva AF) ad $\frac{1}{4}CN^2$ ut $\sqrt{CN^2 - CN \times CF}$ ad $\sqrt{CN \times CF - CF^2}$.

Hæ sunt tres insigniores Hypotheses Gravitatis, etenim si praxin spectemus, tuto supponi potest uniformis, & agere in parallelis, at in rigore geometrico, hypotheses duæ ultimæ in rerum natura locum vere habent. Nam in terræ cavernis gravitas est ut distantiæ corporis à centro Terræ, & in Turrium vel montium cacuminibus ea est reciproce in duplicata ratione distantiæ, ut constat ex principiis *Newtoni*.

Data Linea Celerrimi descensus, invenire legem vis Centripetæ.

Æquatio definiens curvam, AFH (fig. 1.) est $Ay = \sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{NOLM}$. ubi $CO = CB = x$, $DR = OP = x$, $BR = y$, $NFGM = A^2$. Jam area indeterminata $NOLM$ dicatur z^2, & erit $Ay = z\sqrt{x^2 + y^2}$, & inde $zz = \frac{A^2 y^2}{x^2 + y^2} = NOLM$. hujus æquationis capiatur fluxio, & erit $z\dot{z} = \frac{A^2 x^2 y \dot{y}}{\overline{x^2 + y^2}|^2} = \frac{1}{2} POLK = \frac{1}{2} PO \times LO = \frac{1}{2} \dot{x} \times OL$. Unde dividendo per x habebimus Ordinatam $OL = \frac{2 A^2 x y \dot{y}}{\overline{x^2 + y^2}|^2}$ vel $OL = \frac{A^2 x y \dot{y}}{\overline{x^2 + y^2}|^2}$; ex data vero ordinata OL ad Abscissam x pertinente, dabitur curvæ MLG. Q. E. I.

Methodus

Methodus disponendi quotcunque Sphæras in Fornicem. Et inde Demonstratur Proprietas præcipua Curvæ Catenariæ.

PROBLEMA.

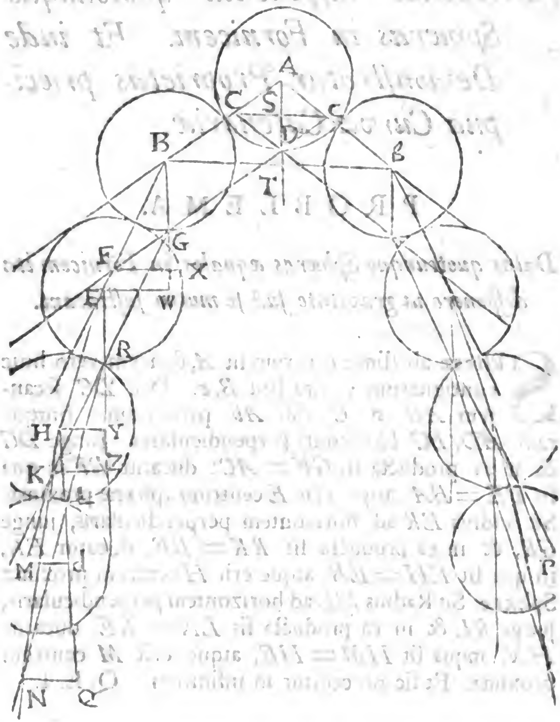
Datas quotcunque Sphæras æquales in Fornicem ita disponere ut gravitate suâ se mutuo sustineant.

SPhæræ altissimæ centrum sit *A*, duarum vero huic contiguarum centra sint *B*, *b*. Duc *DC* secantem *AB* in *C* ipsi *Ab* parallelam: sintque radii *AD*, *BG* Horizonti perpendiculares. Junge *DG* & in ea producta sit *GF* = *AC*: ducatur *BF* in qua sit *BE* = *BA*; atque erit *E* centrum sphæræ proximæ. Sit radius *ER* ad horizontem perpendicularis, junge *GR*, & in ea producta sit *RK* = *BF*; ducatur *EK*, in qua sit *EH* = *EB*; atque erit *H* centrum proximæ Sphæræ. Sit Radius *HL* ad horizontem perpendicularis, junge *RL* & in ea producta sit *LN* = *KE*. ducatur *HN*, inqua sit *HM* = *HE*, atque erit *M* centrum proximæ. Et sic proceditur in infinitum. Q. E. I.

 Demon-

Demonstratio.

Omnes hæ Sphæræ triplici potentia urgentur: & constat ex *Mechanica*, quod tres potentiæ in æquilibrio consistentes eam ad se invicem rationem habent, quam



tres rectæ potentiarum directionibus respective parallelæ & ad ipsarum intersectiones mutuas terminatæ. Sphæra *AΓγ* urgetur gravitate ab *A* versus *D* tendente, & actione

actione sphærarum contiguarum in rectis *AB*, *Ab*. Adeoque si radius *AD* exponat gravitatem Sphæræ absolutam, *AC* exponet vim qua Sphæra *AD* urget Sphæram *BG* à *B* versus *E*. Item *BF* exponet vim qua Sphæra *ER* urget Sphæram *HL*, *EK* vim qua Sphæra *HL* urget Sphæram sequentem. Et sic in infinitum. Vis *BF* resolvitur in vires *BG*, *GF*: id est, *BG*, *AC*: & iisdem æquipollet. Est vero *BG* vis gravitatis globi & *AC* vis qua Sphæra *AD* urget Sphæram *BG*: & hæ duæ vires componunt omne pondus sustinendum à Sphæra *ER*; scilicet unaquæque Sphæra sustinere debet omne pondus quod sustinet proxime superior Sphæra una cum ipsius gravitate absoluta. Et vis *EK* æquipollet viribus *ER*, *RK* vel *ER*, *BF* id est vi gravitatis Sphæræ *ER* & omni pondere quam eadem sustinet. Atque sic pergendo in infinitum, videbis ubique Sphærarum situm ita esse comparatum, ut earum quælibet sustinere potest omne pondus quod sustinet Sphæra immediate superior, una cum ipsius gravitate absoluta: adeoque hæ Sphæræ erunt in æquilibrio, & vi gravitatis sese sustinebunt.

Theorema.

Sint *M* & *H* centra duarum Sphærarum contiguarum; duc *Hd*, *Md*; hanc horizonti parallelam, illam vero eidem normalem. Dico semper esse *Md* ad *dH* ut data quædam recta ad summam diametrorum Sphærarum omnium quam sustinet Sphæra cujus centrum *M*.

A centris Sphærarum *B*, *E*, *H*, *M*, &c. in radios productos (si opus est,) *AD*, *BG*, *ER*, *HL*, &c. demitte normales *BT*, *EW*, *HY*, *MD*, &c. In easdem radios sint etiam perpendiculares *CS*, *FX*, *KZ*, *NQ*, &c. Patet ex Constructione esse $CS = FX = KZ = NQ$. adeoque est *NQ* data recta, quæque ex angulo *BAD* assumpto ad libitum determinatur. Ex constru-

ctione

ctione etiam patet esse $AS = \frac{1}{2} AD = GX, RT = \frac{3}{2} AD$. & $EZ = \frac{5}{2} AD$, $HQ = \frac{7}{2} AD$, &c. Et est Md ad dH ut NQ ad QH, hoc est, ut data recta ad $\frac{7}{2} AD$. vel ut $2 NQ$ ad $7 AD$, est vero $7 AD$ ($= AB + BE + EH + HM$) summa diametrorum omnium Sphærarum quas sustinet Sphæra, cujus centrum M. Constat ergo Theorema, Q. E. D.

Supponamus filum tenue transire per centra omnium Sphærarum, cujus extremitates fixæ sunt in punctis M, P; & tum Sphæras deorsum converti; atque illæ libere pendentes situm priorem inter se retinebunt. Nam potentiarum solummodo directiones, non magnitudines mutantur.

Augeatur numerus Sphærarum & minuantur earum Diametri in infinitum, & filum illud evadet Curva *Catenaria*; & Md erit incrementum Ordinatæ, dH incrementum Abscissæ: & summa diametrorum Sphærarum quas sustinet Sphæra cujus centrum M, erit longitudo curvæ inter verticem A & punctum M intercepta, & quantitas data NQ evadet radius Curvaturæ in vertice.

Unde Catenæ proprietas hæc est; ut incrementum Ordinatæ ad incrementum Abscissæ, ita duplus Radius curvaturæ in vertice ad longitudinem curvæ inter verticem & ordinatam illam interceptæ. Q. E. D.

Et similiter invenies Figuram Tornicis vel Catenæ in quacunque hypothesi gravitatis, quamvis Sphæræ non sunt æquales, vel etiam si essent Sphæroides.

Solutio

Solutio Problematis à Leibnitio *nuper propositi.*

PROBLEMA.

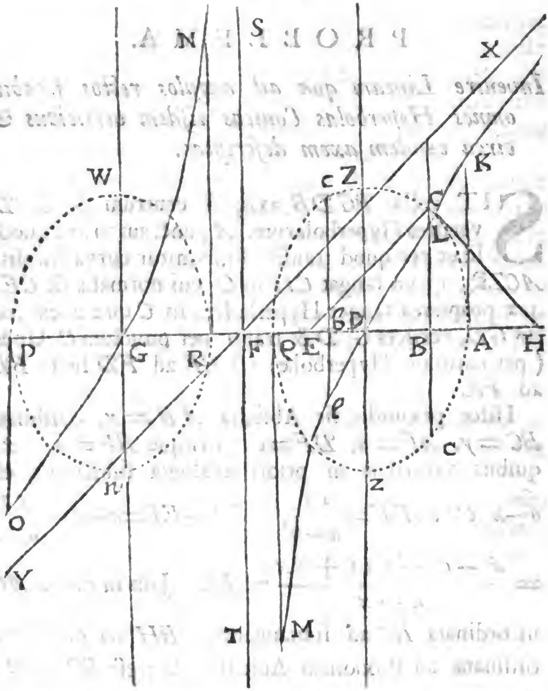
Invenire Lineam quæ ad angulos rectos secabit omnes Hyperbolas Conicas iisdem verticibus & circa eundem axem descriptas.

SIT recta *PGDB* axis, *F* centrum & *G*, *D* vertices Hyperbolarum. *A* punctum in axe quodlibet per quod transire supponitur curva quæsita *ACZQ*; quam tangat *CH* in *C*, cui normalis sit *CE*; quæ propterea tanget Hyperbolam in *C* quæ axem habet *GD*, vertices *G*, *D* & transit per punctum *C*. Unde (per naturam Hyperbolæ) est *BF* ad *FD* sicut *FD* ad *FE*.

Hisce præmissis sit Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$, $AF = a$, $DF = c$. Eritque $BF = a - x$: quibus valoribus in priori analogia substitutis, est $a - x : c :: c : EF = \frac{cc}{a-x}$, & $BF - EF = a - x - \frac{cc}{a-x}$ $= \frac{a^2 - c^2 - 2ax + xx}{a - x} = EB$. Jam in curva *AC*, ut ordinata *BC* ad subtangentem *BH* ita est fluxio ordinatæ ad fluxionem Abscissæ: hoc est $BC : BH :: \dot{y} : \dot{x}$: propter vero similia triangula *EBC*, *CBH*, est $EB : BC :: BC : BH$; unde ex æquo $EB : BC :: \dot{y} : \dot{x}$. ubi si pro *EB* & *BC* substituantur earum valores,

proveniet

proveniet $\frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x} : y :: \dot{y} : \dot{x}$. Ergo $y\dot{y}$ $= \dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ est æquatio curvam quæsitam *AC* definiens. Q. E. I.



Patet hanc æquationem à fluxionibus liberari non posse, nam quantitas $\dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ est fluxio

xio areæ hyperbolæ, cujus ordinata eſt $\frac{a^2-c^2-2ax+x^2}{a-x}$ pertinens ad abſciſſam x. Hæc autem Hyperbola Aſymptotos habet *SFT*, & *XFT*, quarum illa eſt axi *GD* normalis, hæc vero cum illa continet angulos *SFX*, *TFT* ſemirectos; & jacet Hyperbola in angulis illis deinceps, per Hyperbolarum vertices *G*, *D* tranſiens.

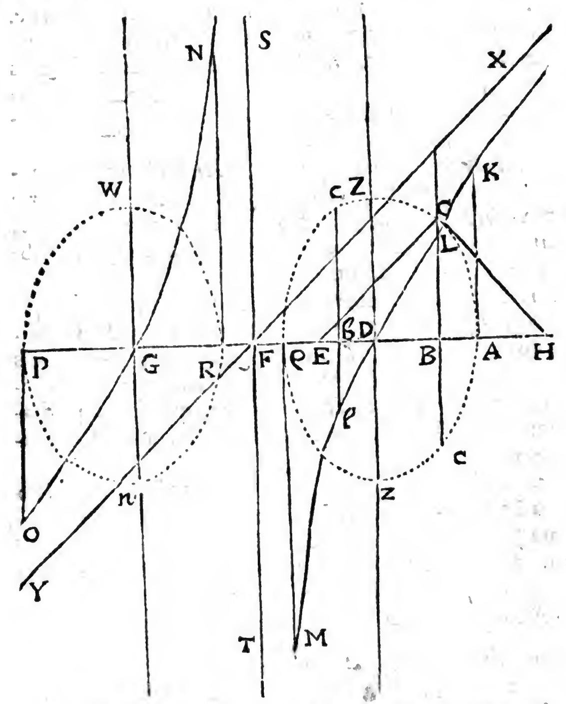
Hac Hyperbola ſemel deſcripta; ut in Schemate, Curvam ſic conſtruo. Ducatur ordinata prima *AK* ſecans Hyperbolam in *K*, & occurrat ordinata quævis alia *BC* eidem in *L*; atque erit $\dot{x} \times \frac{a^2-c^2-2ax+x^2}{a-x}$ vel $y\dot{y}$ fluxio areæ Hyperbolicæ *AKLB*; unde regrediendo ad fluentes, erit $\frac{1}{2}yy =$ areæ *AKLB*, & $yy = 2\,AKLB$, atque $y = \pm\sqrt{2\,AKLB} = BC$ vel Bc, qui duo valores propter contraria ſigna ad partes Abſciſſæ contrarias jacent.

1. Patet hanc curvam ad *A* incipere, ubi incipit area *AL*, nec ultra punctum *A* verſus *H* extendi. Nam ſi area *AKLB* pro affirmativa habeatur, omnis area alia quæ ad alias Abſciſſæ vel Ordinatæ partes jacet erit negativa; & area negativa, quæ latus quadratum non admittit, demonſtrat ordinatæ impoſſibilitatem.

2. Ordinata maxima tranſit per punctum *D*. Nam area *AKLB*; (cujus radici quadratæ æqualis eſt ordinata) continuo creſcit dum progreditur punctum *B* ab *A* verſus *D*. poſtquam vero ordinata *BL* ultra punctum *D* in ſitum *bl* pervenit, minuenda eſt area *AKD* area *blD*, ob arearum plagas contrarias, & tunc erit $bc = \sqrt{2\,AKD - 2\,blD}$.

3. Et Ordinata bc progrediendo à *D* ad *Q* continuo minuitur donec tandem ad *Q* evaneſcit; tunc exiſtente area affirmativa *AKD* æquali areæ negativæ *QMD*.

4. Si ſit *FR* = *FQ* ad partes contrarias ſita, ordinata imaginaria erit inter puncta *Q* & *R*, ob negativam aream prævalentem, & ad *R* iterum incipiet eſſe realis. Etenim area, cujus lateri quadrato æqualis eſt ordinata, manebit negativa donec area affirmativa infinita *FRNS* evadet æqualis areæ negativæ infinitæ *FQMT*.



5. Atque inter puncta *R* & *G* ordinata eodem modo increſcet, quo prius decrevit inter puncta *D*, *Q*; & inter puncta *G*, *P*, ubi eſt *FA* = *FP*, ordinata

rurſus

rurſus continuo decreſcet, atque tandem ad punctum P evaneſcet.

6. Ex his omnibus conjunctim conſtat Lineam de qua quærebatur, fore Curvam Irrationalem quarti ordinis (quam ſcilicet recta in quatuor tantum punctis ſecare poteſt) conſtantem ex duabus Ovalibus æqualibus, ſimilibus, & ſimiliter poſitis, quæ habent punctum duplex in plaga Ordinatarum ad diſtantiam infinitam.

Radius Curvaturæ ad punctum A æqualis eſt AK ordinatæ Hyperbolæ per punctum A tranſeuntis. Concipe enim Abſciſſam AB eſſe infinite parvam, & radius curvaturæ ad punctum A æqualis erit $\frac{BC^2}{2AB} = \frac{y^2}{2x}$: eſt vero in prima ſua magnitudine $yy = 2AB \times AK \doteq 2x \times AK$: ergo Radius Curvaturæ ad punctum A æqualis eſt AK; & eodem modo oſtenditur radium curvaturæ ad Q fore QM.

WPw, ZAz partes curvæ duæ exteriores ſecant omnes Hyperbolas, ad angulos rectos qui axem habent rectam GD. Partes duæ reliquæ interiores WRw, ZQz ad angulos rectos ſecant omnes Ellipſes qui axem habent GD. Adeoque ejuſdem curvæ portiones diverſæ ſatisfaciunt problemati in Ellipſi & Hyperbola ; Ellipſis vero cujus axis minor coincidit cum axe Parabolæ, & centrum cum vertice, & cujus axis major eſt ad minorem ut Diameter Quadrati ad Latus, ſecabit omnes Parabolas circa axem illum eodem vertice deſcriptas.

F I N I S.